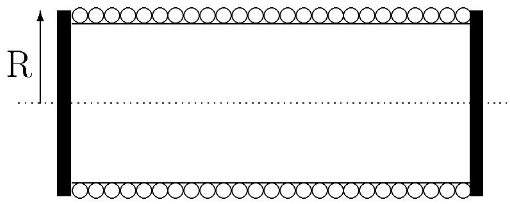
ЗАДАНИЕ ПО КОМПЛЕКСУ ПРЕДМЕТОВ (ФИЗИКА, ИНФОРМАТИКА, МАТЕМАТИКА)
ВАРИАНТ 47001 для 9, 10, 11 класса

Одна из легенд Северомуйского тоннеля рассказывает о бригадире-оптимизаторе Вениамине, у которого «кабель сам разматывался, а рельсы сами прокладывались». «С какой хотите силой толкните бобину» – говорил он – «и если кабель будет разматываться, то она разгонится до безобразия».

Смоделируйте такой процесс.

Пусть на бобину (катушку без бортиков) радиуса $R = 0,75$ м намотан гибкий кабель (см. рис). Масса единицы длины кабеля равна $m = 1$ кг, длина кабеля равна $L = 100$ м. Бобина катится по инерции без проскальзывания по горизонтальной поверхности. Кабель разматывается и ложится на плоскость. Пусть сначала, когда весь кабель был намотан на бобину, скорость центра бобины была равна $v = 0,1$ м/с. Пренебрегая радиусом поперечного сечения кабеля и массой бобины определите



1) во сколько раз изменится линейная скорость бобины, когда будет размотана четверть кабеля;

2) во сколько раз изменится линейная скорость бобины, когда будет размотана ровно половина кабеля;

3) сколько времени займет процесс разматывания половины кабеля.

Указание.

Для поиска ответа на 3-й вопрос рекомендуется перейти к дискретному времени. Это означает, что вместо непрерывного времени нужно использовать время, изменяющееся скачкообразно с некоторым шагом Δt, т.е. рассматривать только моменты времени, отстоящие от начального момента на $k \cdot \Delta t$ (k – произвольное натуральное число). Далее следует допустить, что между указанными моментами масса и скорость бобины не меняются, а все изменения происходят мгновенно в отмеченные моменты времени. Таким образом, весь процесс можно приближенно рассмотреть как последовательность равномерных движений.

Понятно, что чем меньше будет значение шага дискретизации Δt, тем точнее будет расчет, т.е. тем меньше будет разница между «решением», полученным в ходе расчетов и точным решением исходной задачи. В данном случае предлагается подобрать такое значение Δt, чтобы в один из моментов времени бобина находилась в точке с координатой, отличающейся от $\dfrac{L}{2}$ не более, чем на 0,1.

Решение

1. Найдем сначала зависимость скорости поступательного движения бобины *u* от длины размотанной (лежащей на земле) части кабеля x. Обозначим полную массу кабеля через $M = mL$. Поскольку ни у бобины, ни у кабеля нет проскальзывания, то энергия системы не изменяется, т.е.

$$E_{пост} + E_{вращ} + E_{потенц} = \mathrm{const}$$

Первое слагаемое соответствует кинетической энергии поступательного движения, которая равна $\dfrac{(M - mx)u^2}{2}$.

Второе описывает кинетическую энергию вращения и также равно $\dfrac{(M - mx)u^2}{2}$. Чтобы его получить, рассмотрим произвольный кусочек обода бобины. Этот кусочек в каждый момент времени движется вокруг центра бобины со скоростью *u* (тангенциальной). Суммируя такие кусочки по всему ободу, получим, что полная масса обода (включая намотанный кабель) движется во скоростью *u,* что дает нужное выражение для энергии. (Разумеется, можно получить это же выражение, используя момент инерции и угловую скорость.)

Наконец, третье слагаемое – потенциальная энергия – складывается из энергии намотанного на бобину остатка кабеля, находящегося на некоторой высоте над поверхностью земли. Поскольку максимальная высота элементов кабеля равна 2*R*, а его масса распределена по высоте равномерно, получаем $E_{потенц} = (M - mx)\,gR$.

Таким образом, получаем уравнение баланса энергии

$$Mv^2 + MgR = (M - mx)u^2 + (M - mx)\,gR.$$

Откуда $u(x) = \sqrt{\dfrac{Mv^2 + mgRx}{M - mx}} = \sqrt{\dfrac{Lv^2 + g\,R\,x}{L - x}}$.

2. Из выведенной формулы получаем ответы на 1 и 2 вопросы, подставляя нужные значения x: $u(L/4) \approx 1.57$, $u(L/2) \approx 2.72$.

3. Теперь мы имеем задачу о прямолинейном неравномерном движении точки, скорость которой зависит от ее положения x и которая должна пройти путь от пункта $x = 0$ до пункта $x = L$.

Пусть время изменяется с шагом Δt, за начальный момент примем $t_1 = 0$. Тогда на первом этапе точка пройдет путь $S_1 = u(0) \cdot \Delta t$ и будет иметь координату $x_1 = 0 + S_1$. На втором этапе будет пройден путь $S_2 = u(x_1) \cdot \Delta t$, и точка будет иметь координату $x_2 = x_1 + S_2$ и т.д.

Обобщая, получаем на k-ом этапе путь $S_k = u(x_{k-1}) \cdot \Delta t$ и координату $x_k = x_{k-1} + S_k$. Как только очередная координата x_N окажется больше L, вычисления следует прекратить. На прохождение пути от 0 до x_N будет, очевидно, затрачено время $T = N \cdot \Delta t$.

4. Запишем полученный алгоритм на псевдокоде, приближенном к некоторым современным алгоритмическим языкам.

INPUT Δt

OUTPUT $x[]$

BEGIN

$L := 100;$ $g := 9.8;$ $R := 0.75$

$x_0 := 0;$ $n := 0$

WHILE $x_n < \frac{L}{2}$

BEGIN

$$u = \sqrt{\frac{Lv^2 + g\,R\,x_n}{L - x_n}}$$

$x_{n+1} := x_n + u \cdot \Delta t$

$n := n + 1$

END

RETURN x

END

5. Проведем вычислительный эксперимент.

Вызовем написанную функцию при значении $\Delta t = 1$. Мы получим на выходе массив из 47 элементов, в котором $x_{46} := 48.949$, а $x_{47} := 51.609$. Оба значения отличаются от $\frac{L}{2} = 50$ более, чем на 0.1. Поэтому будем постепенно уменьшать Δt и заново вызывать функцию.

При значении $\Delta t = 0.1$ мы получим на выходе массив 450 элементов, в котором $x_{449} := 49.937$, а $x_{450} := 50.208$. Предпоследний элемент массива нас устраивает. Поэтому весь интересующий нас процесс будет продолжаться $\Delta t \cdot 449 = 44.9$ сек.

Заметим, что в зависимости от выбора стратегии уменьшения шага времени, ответ мог получиться при другом значении $\Delta t = 0.1$ *(и, соответственно, с другим количеством шагов). Такой расчет также был бы верным. Вопрос же о точности полученного значения выходит за школьные рамки. Заинтересовавшиеся им участники смогут найти ответ на втором курсе любого технического ВУЗа.*

ответ

1) увеличится примерно в 15.7 раз;
2) увеличится примерно в 27.2 раза;
3) процесс займет 44.9 секунд.

Замечание 1. Все приведенные выше численные результаты являются приближенными. Вопрос о точности расчетов (т.е. вопрос о том, сколько знаков оставлять при округлении) не ставился.

Замечание 2. Вопрос о схожести результата при использовании другой стратегии подбора шагов по времени также не затрагивается. При оценивании задачи больше значения придается алгоритму и модели явления, нежели расчету с высокой точностью.