ЗАДАНИЕ ПО ИНФОРМАТИКЕ
ВАРИАНТ 73111 для 11 класса

Для заданий 1, 2, 4, 5 требуется разработать алгоритм на языке блок-схем, псевдокоде или естественном языке

1. Дана последовательность чисел C_1, C_2, ..., C_n, ... в которой C_n есть последняя цифра числа n^n. Первые 4 элемента последовательности таковы: 1 ($1^1 = 1$), 4 ($2^2 = 4$), 7 ($3^3 = 27$), 6 ($4^4 = 256$). Разработать алгоритм нахождения наименьшего периода этой последовательности. Предусмотреть выход из алгоритма, если возможная величина периода превысила 10! (факториал числа n определяется как произведение всех натуральных чисел от 1 до n).

Схема решения. Первая подзадача – вычислить последнюю цифру числа n^n. Поскольку число такого вида может оказаться очень большим, лучше вычислить именно последнюю цифру, т.е. остаток от деления на 10. Для этого можно положить переменную *result* равной n **mod** 10, затем $(n - 1)$ раз произвести следующие вычисления:

$result = (result \cdot n)$ **mod** 10

Далее будем искать период последовательности. Если период равен p, то для проверки этого нужно вычислить $2 \cdot p$ элементов последовательности. Сначала вычислим первые два элемента последовательности. Затем для p от 1 до 10! проверяем, является ли p периодом последовательности. Если да, то прекращаем вычисления, в противном случае добавляем к последовательности ещё два элемента и проверяем следующее значение p.

Для проверки, что некоторое значение p является периодом последовательности длиной $2 \cdot p$, надо проверить, что для всех i от 1 до p элемент последовательности с номером i равен элементу последовательности с номером $i + p$.

2. Дима и Петя играли в игру. На столе есть 3 пересекающихся ряда карточек, на каждой из которых записано целое число. Ряды расположены в виде треугольника, крайние карточки в каждом ряду представляют углы треугольника. Помогите ребятам и разработайте алгоритм для решения следующей задачи. Задача – расположить все карточки в первом ряду от меньшего числа к большему, во втором ряду – от большего к меньшему. Значения на стыках рядов выставлять по порядку обхода. В третьем ряду числа должны располагаться от минимального к максимальному. Если на стыках с двумя другими рядами не оказался минимум и максимум, вывести соответствующее сообщение.

Схема решения. Для хранения данных можно использовать три одномерных массива, но тогда придётся следить за тем, чтобы первый/последний элемент в одном ряду был равен первому/последнему элементу в других рядах. Или можно использовать один одномерный массив, в котором элементы с номерами от 1 до n будут хранить числа первого ряда, элементы с номерами от n до $2 \cdot n - 1$ будут хранить числа второго ряда, и, наконец, элементы с номерами от $2 \cdot n - 1$ до $3 \cdot n - 2$ будут хранить числа третьего ряда. В элемент с номером $3 \cdot n - 1$ можно после сортировки первого ряда скопировать значение первого элемента для упрощения обработки третьего ряда.

Чтобы использовать одну процедуру для сортировки всех рядов надо добавить в параметры флаг для управления направлением сортировки (по возрастанию или по убыванию), а также номера первого и последнего элемента для обработки (если данные хранятся в одном массиве). Используем любой метод сортировки, при этом элементы первого ряда сортируем по возрастанию, затем элементы второго ряда – по убыванию. Далее проверяем, что первый элемент третьего ряда меньше всех остальных элементов третьего ряда, а последний элемент третьего ряда – больше всех остальных элементов третьего ряда. Если это так, сортируем третий ряд по возрастанию. В противном случае проверяем, что первый элемент третьего ряда больше всех остальных элементов третьего ряда, а последний элемент третьего ряда – меньше всех остальных элементов третьего ряда. В этом случае сортируем третий ряд по убыванию. В противном случае выводим сообщение, что сортировка невозможна.

3. Участник тематической смены «Школа молодого энергетика» во Всероссийском детском центре «Смена» на берегу Черного моря Серёжа всегда любил играть с калькулятором и носил его с собой. В перерыве между занятиями Сережа решил поделить два вещественных числа a и b друг на друга, а затем результат снова разделил на b. Выполнив эти действия много раз (много делений на b), Серёжа неожиданно для себя увидел на дисплее калькулятора ноль. Сережа - очень интересующийся школьник, и попробовал повторить результаты на домашнем компьютере. В итоге Серёжа снова получил ноль, но после значительно большего числа повторений деления. Помогите Сереже разобраться с тем, почему это произошло и почему такой результат наблюдался после разного числа повторений деления?

Схема решения. Поскольку при многократном делении Сережа получил ноль, то b>1. Задача связана с понятием машинного ноля. К пересечению порога машинного нуля приводит многократная операция деления вещественных чисел в силу их представления как (знак, порядок, мантиссса). Разница в числе повторений деления связана с тем, что компьютер и калькулятор могут обрабатывать разный диапазон вещественных чисел.

4. На экране монитора нарисована таблица размером на $N \times N$ (на рисунке приведён пример для $N = 5$ и $N = 6$). В некоторых ячейках таблицы записаны целые числа. Найти сумму и максимальное значение элементов, расположенных в закрашенной части таблицы.

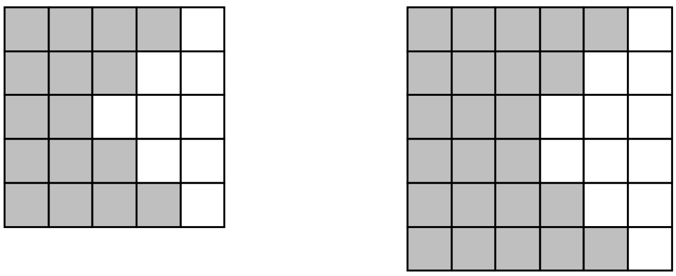

Схема решения. Для обработки закрашенных ячеек будем использовать следующие циклы: номер строки i меняется от 1 до N **div** 2, при этом номер строки j меняется от 1 до $N - i$. На каждом шаге цикла обрабатываем две ячейки, находящиеся в строках i и $N - i + 1$, т.к. закрашенная часть симметрична. Если количество строк нечётно, то средняя строка не будет обработана, и её надо обработать отдельно, при этом берём i, равное N **div** 2 + 1,
j меняется от 1 до $N - i$.

5. При шифровании последовательности цифр каждая цифра x заменяется остатком от деления значения многочлена $F(x) = b \cdot (x^3 + 7x^2 + 3x + a)$ на число 10, где a, b – фиксированные натуральные числа. Разработайте алгоритм определения, при каких значениях a, b указанное преобразование допускает однозначное расшифрование.

Схема решения. Однозначное расшифрование возможно, если каждой цифре соответствует разный результат. Поскольку нас интересуют остатки от деления, то для a и b достаточно рассмотреть значения от 0 до 9. Для каждой комбинации a и b вычисляем шифр $F(x)$ для всех цифр от 0 до 9 и сравниваем шифры друг с другом. Для упрощения сравнения можно завести массив из 10 элементов с индексами от 0 до 9. В этом массиве индекс будет соответствовать цифре. Далее считаем, сколько раз встречается каждый шифр. Если все шифры разные, то в массиве должны получиться все единицы.

Если (a_i, b_i) – пара значений, удовлетворяющих условию, то итоговый результат будет иметь вид $(10 \cdot n + a_i, 10 \cdot n + b_i)$, где n – любое натуральное число (в том числе 0).

Если подумать, то можно исключить значение b, равное 0, т.к. при умножении на 0 всегда получается 0. Также можно исключить значение b, равное 5. Если число имеет вид $5 \cdot n$, то остаток от деления на 10 будет равен 0 или 5. Также можно исключить чётные значения b. Если число имеет вид $2 \cdot n$, то остаток от деления на 10 будет чётным. Т.е. в этих случаях не получаются разные шифры для всех цифр.

Если ещё подумать, то можно вычислить, что выражение $x^3 + 7x^2 + 3x$ даёт разные остатки от деления для всех цифр. Следовательно, значение a может быть любым, т.к. оно всегда будет давать одинаковый вклад, и остатки от деления будут оставаться разными. На результат влияет только значение b.

Кроме того, если $x^3 + 7x^2 + 3x + a$ даёт разные остатки от деления, а b равно 1, 3, 7 или 9, то остатки от деления на 10 выражения $b \cdot (x^3 + 7x^2 + 3x + a)$ тоже будут разными.

В итоге получается, что a может быть любым (в том числе больше 9), b имеет вид $10 \cdot n + bb$, где n – любое натуральное число (в том числе 0), а bb есть 1, 3, 7 или 9.