Лучшие задачи отборочного этапа с решениями Олимпиады школьников «Надежда энергетики» по предмету «математика» в 2018/2019 учебном году.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Задача 1 (11 класс).

Выясните, существует ли такое натуральное число n, для которого найдутся натуральные числа k_1, k_2, k_3, k_4 такие, что

$$\left(1-\frac{1}{2}\right)^{k_1}\cdot\left(1-\frac{1}{3}\right)^{k_2}\cdot\left(1-\frac{1}{4}\right)^{k_3}\cdot\left(1-\frac{1}{5}\right)^{k_4}=(0,1)^n.$$

Если таких чисел n несколько, то найдите показатели степени k_1, k_2, k_3, k_4 для каждого допустимого n.

Решение.

Данное в условии равенство эквивалентно следующему.

$$\left(\frac{1}{2}\right)^{k_1}\cdot\left(\frac{2}{3}\right)^{k_2}\cdot\left(\frac{3}{4}\right)^{k_3}\cdot\left(\frac{4}{5}\right)^{k_4}=\frac{1}{2^n\cdot 5^n}.$$

Отсюда

$$2^{k_2}\,3^{k_3}\,2^{2k_4}\cdot 2^n\cdot 5^n=2^{k_1}\,3^{k_2}\,2^{2k_3}\,5^{k_4}$$

Приравнивая соответствующие степени, получаем линейную систему

$$\begin{cases} k_1+2k_3=k_2+2k_4+n\\ k_2=k_3\\ k_4=n\end{cases}$$

Неизвестных оказалось на 1 больше, чем уравнений, поэтому выразим все через k_3 (можно выбрать и любую другую). Получим

$$\begin{cases} k_1=3n-k_3,\\ k_2=k_3,\\ k_3-\ \text{произвольное натуральное},\\ k_4=n.\end{cases}$$

Чтобы все показатели были натуральными, необходимо, чтобы $3n-k_3\geq 1$. При любом натуральном n такой выбор возможен.

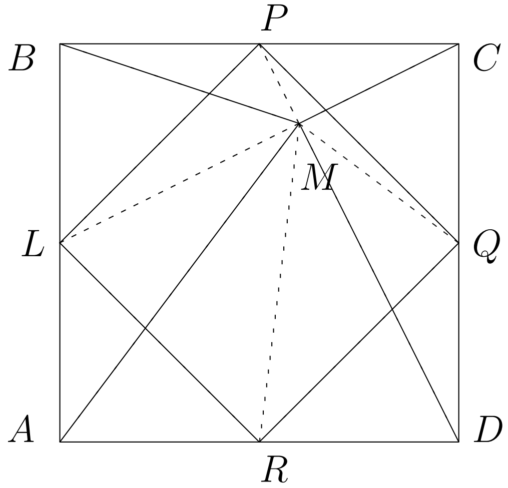
Ответ: n – любое натуральное,

$(k_1,k_2,k_3,k_4)=(3n-m,m,m,n)$, где m – произвольное натуральное число из диапазона $\{1,\ldots 3n-1\}$.

Задача 2 (11 класс).

Внутри квадрата $ABCD$ выбрана произвольная точка M. Докажите, что точки пересечения медиан треугольников ABM, BCM, CDM и DAM являются вершинами некоторого квадрата. Какую часть площади квадрата $ABCD$ занимает этот квадрат?

Решение



Основания медиан, опущенных из точки M, находятся в середине сторон квадрата $ABCD$ (см. рис.) и образуют квадрат $PQRL$.

Точки пересечения медиан треугольников ABM, BCM, CDM и DAM образуют квадрат, который получается из квадрата $PQRL$ путем сжатия его к точке M в $2/3$ раза (по свойству медиан).

Квадрат $PQRL$ занимает половину площади квадрата $ABCD$ и от этой половины надо взять еще $2/3$. Переходя от линейных размеров к площадям, получаем $(2/3)^2 = 4/9$ части квадрата $PQRL$.

Итого, площадь квадрата, образованного точками пересечения медиан равна $1/2 \cdot 4/9 = 2/9$.

Ответ: $2/9$.

Задача 3 (10 класс).

Для гарантии новогоднего настроения вдоль прямолинейной набережной установлено тридцать пять снежных пушек с электроприводом. Если занумеровать их по порядку, то расстояние между пушками с номером k и с номером $k+1$ равно $(k+1)^2$ м. Где следует установить электрогенератор, чтобы суммарная длина проводов, ведущих к пушкам, была минимальной (каждая пушка соединена с генератором напрямую прямолинейным проводом)?

Решение

Обозначим точки, в которых стоят пушки, $x_1, x_2, \ldots, x_n$, занумеровав их слева направо. Заметим, что n нечетно. Через A обозначим точку, в которой необходимо установить генератор.

Если взять точку A левее x_1, то сумму расстояний можно уменьшить, смещая A вправо. Если взять точку A правее x_n, то сумму расстояний можно уменьшить, смещая A влево. Таким образом, A должна быть расположена между x_1 и x_n. Заметим, что для любой точки, расположенной между x_1 и x_n сумма расстояний $x_1A + x_nA$ постоянна (и равна длине отрезка $x_1\,x_n$).

Проводя аналогичные рассуждения относительно пары точек x_2 и x_{n-1}, затем относительно пары точек x_3 и x_{n-2} и так далее, приходим к выводу, что точка A должна совпадать со средней (по номеру) заданной точкой.

Ответ: следует установить в месте расположения 18-й (средней) пушки.

Задача 4 (10 класс).

В десятичной записи числа M две цифры оказались пропущенными. Они обозначены ниже подчеркиваниями.

$$M = 15! + 12! - 11! = 1\,308\,1\_\_\,452\,800.$$

Можно ли восстановить эти цифры, не выполнив ни одного умножения? Либо найдите их, либо покажите, что это сделать невозможно.

Решение.

Обозначим левую цифру x, правую – y.

Все три слагаемые содержат множитель 9. Поэтому полученное число должно делиться на 9. Сумма всех его цифр равна $44+x+y = 36+8+x+y$, следовательно, величина $8 + x + y$ должна делиться на 9. С учетом того, что x и y – цифры от 0 до 9, величина $8+x+y$ может принимать значения 9 или 18.

Аналогично, все три слагаемые содержат множитель 11. Поэтому полученное число должно делиться на 11, т.е сумма его цифр, стоящих на четных позициях должна быть либо равна сумме цифр на нечетных позициях, либо отличаться от нее на число, кратное 11. Указанные суммы равны $21 + y$ и $23+x$. Их разность $2+x-y$ может принимать значения 0 или 11. Рассмотрим эти два случая.

Если $2 + x - y = 11$, то $x = 9 + y$, что возможно только если $y = 0$, $x = 9$. Но величина $5 + 9 + 0$ не делится на 9. Первый случай отпадает.

Если $2 + x - y = 0$, то $y = 2 + x$. Тогда $5 + x + y = 7 + 2x$.

Если эта величина равна 18, то $2x = 11$, что невозможно.

Остается единственный случай $5+x+y=7+2x=9$. Он дает $x=1$ и $y=3$.

Ответ. левая цифра – 1, правая – 3.

Задача 5 (9 класс).

Из множества $\{1, 2, \ldots, n\}$ удалили одно число X, среднее арифметическое оставшихся чисел составило $59/4$. Найдите n и X.

Решение.

Согласно условию

$$\frac{(1+\ldots+n)-X}{n-1}=\frac{n(n+1)-2X}{2(n-1)}.$$

Полагая в левой части последнего равенства $X=1$ и $X=n$, получаем

$$\frac{n(n+1)-2}{n-1}=\frac{n+2}{2}\geq 59/4 \quad \text{и} \quad \frac{n(n-1)}{n-1}=\frac{n}{2}\leq 59/4$$

соответственно. Поскольку число n – целое, из первого и второго неравенств получаем $n\geq 28$ и $n\leq 29$.

Если $n=28$, то $\dfrac{28\cdot 29-2X}{54}=\dfrac{59}{4}\Rightarrow X=\dfrac{31}{4}$ – не подходит (X – не целое).

Если $n=29$, то $\dfrac{29\cdot 30-2X}{56}=\dfrac{59}{4}\Rightarrow X=22$.

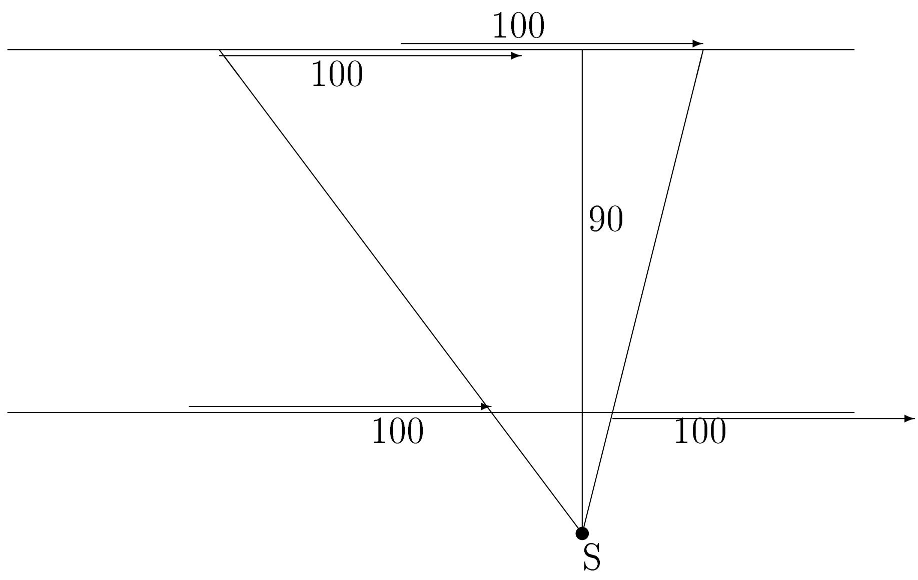
Ответ. $n=29$, $X=22$.

Задача 6 (9 класс).

Вар. 2. По разным берегам прямолинейного канала в одном и том же направлении равномерно движутся две колонны бронетехники. Длина каждой колонны равна 100 м. Шпион находится на расстоянии 90 м от дальнего берега. Ближняя колонна движется в 4 раза быстрее и загораживает от шпиона часть дальней колонны (то есть дальняя колонна ему видна не целиком или вообще не видна) в течение 5 с. Скорость дальней колонны равна 10 м/с. Найдите расстояние от шпиона до ближнего берега.

Решение.

Изобразим ситуацию на чертеже.



Шпион — в точке S. Доп. отрезками со стрелками обозначены положения колонн в моменты начала и окончания такого загораживания. За 5” ближняя колонна проходит 200 м. Часть пути, занятая ею все это время, имеет длину $200 - 100 = 100$ м. Дальняя колонна за это же время проходит 50 м и занимает часть пути длиной $100 + 50 = 150$ м. Из подобия треугольников получаем, что расстояние до ближней и дальней колонн относятся друг к другу как соответствующие участки пути. Следовательно, искомое расстояние есть $\frac{100}{150} \cdot 90 = 60$ м.

Ответ: 60 м.

Задача 7 (8 класс).

На дистанции ультрамарафона устроено 7 пунктов питания, причем только на двух из них – ПП-1 и ПП-2 (расположенных по соседству друг с другом) – дают гречку с тушенкой. Может ли сумма расстояний от каждого пункта питания до ПП-1 быть равна сумме расстояний от каждого пункта питания до ПП-2? (Все расстояния измеряются вдоль дистанции.)

Решение.

Пусть слева от ПП-1 и ПП-2 расположено k точек, а справа m точек (одно из этих чисел может быть равно нулю). Пусть расстояние между ПП-1 и ПП-2 равно d.

Пусть сумма расстояний от всех левых точек до ПП-1 равна S_L.

Тогда сумма расстояний от всех левых точек до ПП-2 равна $S_L + k\,d$.

Пусть сумма расстояний от всех правых точек до ПП-2 равна S_R.

Тогда сумма расстояний от всех правых точек до ПП-1 равна $S_R + m\,d$.

В задаче требуется установить, верно ли равенство

$$S_L + (S_R + m\,d) = (S_L + k\,d) + S_R,$$

которое эквивалентно равенству

$$m = k.$$

Но поскольку число $m + k = 5$ (что нечетно), последнее равенство невозможно.

Ответ: не может.

Задача 8 (8 класс).

Докажите, что число $K = 2 \cdot 2018^4 + 3 \cdot 2018^3 + 2018^2$ делится на 3, не находя самого числа K. Делится ли оно на 9?

Решение.

В представлении числа K имеется слагаемое, кратное 3, поэтому достаточно доказать делимость на 3 числа без этого слагаемого, т. е. числа $K_1 = 2018^4 + 2018^2$. Имеем $2018 = 3 \cdot 673 - 1 = 3n - 1$, $n \in \mathbb{Z}$,

$$K_1 = (3n-1)^2(2(3n-1)^2+1) = (3n-1)^2(3m+2+1) = 3(3n-1)^2(m+1),$$

$(3n-1)^2, m, m+1 \in \mathbb{Z}$, откуда видно, что K_1 и, следовательно, K **кратно 3**.

Рассмотрим делимость на 9. Имеем $2019 = 2016 + 2 = 9N + 2$, $N \in \mathbb{Z}$,

$$K = (9N+2)(2(9N+2)^3 + 3(9N+2)^2 + 9N + 2) =$$

$$= (9N+2)(9M + 2 \cdot 2^3 + 3 \cdot 2^2 + 2) = (9N+2)(9L+3) = 9Q + 6.$$

Таким образом, при делении на 9 число K имеет остаток 6, следовательно, K **не кратно 9** .

Задача 9 (7 класс).

В новогоднем парке Кыш Бабая на четырех параллельных новогодних аллеях растут новогодние ели. На трех аллеях без первой растет в сумме 150 елей, на трех без второй – 165 елей, на трех без третьей – 160 елей, на трех без четвертой – 125 елей. Сколько всего елей растет на этих четырех аллеях?

Решение

Приведем решение, не требующее находить количество елей на каждой аллее

Обозначим через x_k количество елей на k-й аллее. По условию,

$$x_2 + x_3 + x_4 = 150,$$
$$x_1 + x_3 + x_4 = 165,$$
$$x_1 + x_2 + x_4 = 160,$$
$$x_1 + x_2 + x_3 = 125,$$

Обозначим через $S = x_1 + x_2 + x_3 + x_4$ общее количество елей. Сложив все равенства, получим

$$3S = 600,$$

откуда $S = 200$.

Ответ. На всех аллеях 200 елей.

Задача 10 (7 класс).

Любительница индийских фильмов смотрит, как по киноэкрану слева направо с постоянной скоростью движется вереница из 30 слонов. От появления на экране первого слона до исчезновения последнего проходит 10 минут. По всей ширине экрана может уместиться 50 слонов. Определите скорость вереницы, измеренную в количестве слонов в минуту.

Решение.

Обозначим ширину экрана через S, длину вереницы через L. Согласно условию, $S = 50$, $L = 30$ (обе величины – в слонах). За время $t = 10$ мин вереница проходит расстояние $S + L$. Таким образом, ее скорость

$$v = \frac{S + L}{t} = 8 \text{ слонов в минуту.}$$

Ответ: 8 слонов в минуту.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Задача 1 (5 класс)

Дед Мороз подготовил много одинаковых подарков для девочек и мальчиков. Если разделить все подарки на 100 равных частей, то 65 таких частей можно уместить в большой волшебный мешок, а 40 частей – в малый магический кулек. Если же попытаться наполнить и мешок и кулек одновремено, то не хватит 30 подарков. Сколько подарков входит в мешок и сколько в кулек?

Решение

Найдем, чему равна одна часть.

В мешок и кулек вмещается ровно 105 частей, т.е. на 5 частей больше, чем имеется у Деда Мороза.

Поскольку для заполенния и того, и другого не хватает 30 подарков, то 5 частей – это в точности 30 подарков.

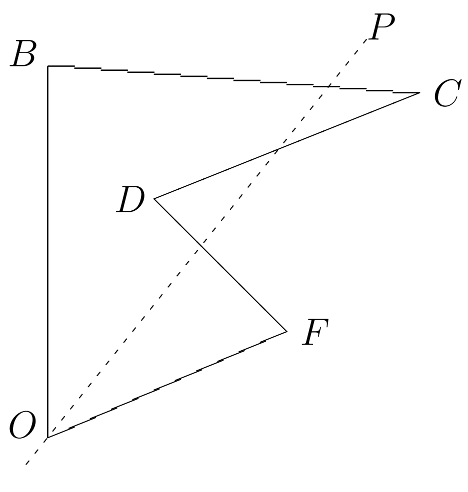
Отсюда, одна часть равна 6 подаркам. Следовательно, мешок вмещает $65 \cdot 6 = 390$ подарков, а кулек – $40 \cdot 6 = 240$ подарков.

Ответ: в мешок входит 390 подарков, в кулек – 240 подарков.

Задача 2 (5 и 6 класс)

Для того, чтобы юной снегурочке (настоящей) разрешили участвовать в детском празднике, ей нужно нарисовать пятиугольник и прямую, проходящую через какую-либо выбранную вершину пятиугольника и пересекающую три другие его стороны (не приходящие в выбранную вершину). Помогите ей сделать это – нарисуйте такой пятиугольник и прямую.

Решение. На рисунке ниже представлен пятиугольник $OBCDF$, через вершину O которого проходит прямая OP, пересекающая три стороны: BC, CD, DF в соответствии с условием задачи.



Задача 3 (6 класс)

Три тролля – Хримнир, Хрольмир и Хрюмстан – строят свои хижины на краю обрыва (оттуда удобнее смотреть за границу на Деда Мороза). Расстояние между хижинами Хримнира и Хрольмира равно 150 шагам, между хижинами Хрольмира и Хрюмстана – 200 шагам и между хижинами Хримнира и Хрюмстана равно 350 шагам. Где троллям следует установить подзорную трубу, чтобы сумма расстояний от каждой хижины до трубы была бы наименьшей?

Решение.

Обозначим хижины Хримнира, Хрольмира и Хрюмстана как A, B и C. Как следует из условия, B расположена между A и C (поскольку $150+200 = 350$).

Если бы подзорная труба была расположена левее A, то сумму расстояний можно было бы уменьшить, смещая лестницу вправо (в сторону A). Если бы подзорная труба была расположена правее C, то сумму расстояний можно было бы уменьшить, смещая лестницу влево (в сторону C). Таким образом, она должна быть расположена между A и C.

Заметим, что для любой точки, расположенной между A и C сумма расстояний до A и до C постоянна (и равна расстоянию между A и C, т.е. 350 шагам). Следовательно, подзорную трубу надо располагать как можно ближе к точке B. Минимально возможное расстояние до B равно 0, если установить ее в самой точке B.

Ответ: подзорную трубу следует установить в хижине Хрольмира (находящейся между двумя другими).