ЗАДАНИЕ ПО ИНФОРМАТИКЕ
ВАРИАНТ 73111 для 11 класса

Для заданий 1, 2, 4, 5 требуется разработать алгоритмы на языке блок-схем, псевдокоде или естественном языке

1. Для проверки, является ли большое целое простым, может использоваться вероятностный тест Леманна. Пусть $p \geq 5$ – проверяемое нечётное число. Тогда:
   - случайно выбираем a: $2 \leq a \leq p - 2$;
   - вычисляем $r = a^{(p-1)/2}$ {mod p};
   - если $r \neq 1$ и $r \neq p-1$, то p – составное.

   В тесте Леманна эти проверки выполняются для t случайно выбираемых a.
   Написать алгоритм проверки вводимого числа на простоту по тесту Леманна.
   Примечание: $x = y$ {mod n}, если существует целое k, для которого $x = y + k \cdot n$.

Схема решения. В цикле t раз выбираем число a в заданном диапазоне. Для каждого a вычисляем $r = a^{(p-1)/2}$ {mod p}. Для того чтобы при возведении в степень не получилось слишком большого числа (выходящего за пределы чисел, представимых в компьютере), можно применять операцию вычисления остатка от деления после каждого умножения на a. Если выполняется условие $r \neq 1$ и $r \neq p - 1$, значит, число составное, и проверку можно прекращать.

2. В пансионате для спортивного досуга детей оборудована специальная площадка с большим числом крупных клеток L, выложенных в дорожки одинаковой длины. По дорожкам (от начала до конца) с клетки на клетку любят прыгать отдыхающие дети. На каждой клетке нарисован вес – натуральное число. Выигрывает тот ребенок, который при прыжках набрал минимальный суммарный вес. В игре принимали участие $M<<L$ *(меньше на порядки)* детей, прыгающих за один ход на 1, 3, 4 или 5 клеток. Предложите наиболее оптимальный способ обработки и хранения информации для моделирования ситуации (например, для определения победителя). Примечание: прыгать на 2 клетки нельзя.

Схема решения. Для хранения данных будем использовать матрицу из $L \times L$ элементов, в элементах которой записан вес каждой клетки. Результаты детей запишем в виде массива из $L \times M$ элементов, причём элемент равен 1, если ребёнок прыгал на данную клетку, и 0 – в противном случае. Также надо записать номер дорожки, по которой он прыгал. Чтобы получить итоговый результат, надо сложить веса клеток, на которые прыгал каждый ребёнок. Для проверки соблюдения правил будем вычислять разницу между индексами элементов в каждой строке второй матрицы, содержащих значение 1. Для этого положим сначала номер предыдущей использованной клетки 0, затем при нахождении в массиве значения 1 вычисляем разницу. Если она не равна 1, 3, 4 или 5, значит, правила была нарушены. Иначе прибавляем к общему результату вес текущей клетки и запоминаем номер текущей клетки как номер предыдущей.

3. Одиннадцатиклассник Иван любит играть с калькулятором. Он часто сначала вычисляет функцию y=sin(cos(sin(cos(… sin(x)))), а затем к результату применяет обратную функцию arcsin(arccos(arcsin(… arcsin(y))). Выполнив эти действия одинаковое число раз, Иван получил в результате некоторое число. Будет ли оно исходным? Объясните, почему?

Ответ. Не будет. Возникающая в процессе вычислений погрешность, обусловленная округлением вещественных чисел при представлении в ЭВМ, изменит результат.

4. Не используя дополнительный массив или простые методы сортировок, найти в матрице значения трех первых минимальных элементов.

Схема решения. Найдём минимальный элемент массива. Далее проходим по массиву, ищем элементы, равные минимальному, и переставляем их в начало массива. Если в массиве есть три равных минимальных значения, значит, поиск можно закончить. Если же таких значений меньше трёх, надо снова найти минимальное значение, не рассматривая первые один или два элемента массива.

5. Простым числом Мерсенна называется простое число E, представимое в виде $E = 2^p - 1$, где p – простое число. На листе бумаги нарисована таблица размером $M \times M$ клеток. Таблица разделена на 4 равных квадрата. Какие-то из клеток в квадратах заполнены натуральными числами. Посчитать число простых чисел Мерсенна в правом нижнем квадрате. Число M должно быть чётным.

Схема решения. Если M – нечётное число, значит, исходные данные заданы неверно. Иначе перебираем элементы таблицы с индексами $i = M / 2 + 1 \dots M$ и $j = M / 2 + 1 \dots M$. Для каждого элемента, являющегося натуральным числом, надо проверить, является ли он простым числом Мерсенна. Можно просто проверять каждое число n на простоту, и, если оно является простым, вычислять $p = \ln_2(n + 1)$ и проверять, что p является целым простым числом. Или можно найти максимальное число в правом нижнем квадрате, вычислить $p = \ln_2(max + 1)$, построить массив простых чисел в диапазоне от 2 до p и массив соответствующих простых чисел Мерсенна, и проверять каждое число из правого нижнего квадрата таблицы на вхождение в построенный массив.

ЗАДАНИЕ ПО ИНФОРМАТИКЕ
ВАРИАНТ 73112 для 11 класса

Для заданий 1, 2, 4, 5 требуется разработать алгоритмы на языке блок-схем, псевдокоде или естественном языке

1. Для проверки, является ли большое целое простым, может использоваться вероятностный тест Леманна. Пусть $p \geq 5$ – проверяемое нечётное число. Тогда:
   - случайно выбираем a: $2 \leq a \leq p-2$;
   - вычисляем $r = a^{(p-1)/2}$ {mod p};
   - если $r \neq 1$ и $r \neq p-1$, то p – составное.

   В тесте Леманна эти проверки выполняются для t случайно выбираемых a.
   Написать алгоритм проверки вводимого числа на простоту по тесту Леманна.
   Примечание: $x = y$ {mod n}, если существует целое k, для которого $x = y + k \cdot n$.

Схема решения. В цикле t раз выбираем число a в заданном диапазоне. Для каждого a вычисляем $r = a^{(p-1)/2}$ {mod p}. Для того чтобы при возведении в степень не получилось слишком большого числа (выходящего за пределы чисел, представимых в компьютере), можно применять операцию вычисления остатка от деления после каждого умножения на a. Если выполняется условие $r \neq 1$ и $r \neq p-1$, значит, число составное, и проверку можно прекращать.

2. В пансионате для спортивного досуга детей оборудована специальная площадка с большим числом крупных клеток L, выложенных в дорожки одинаковой длины. По дорожкам (от начала до конца) с клетки на клетку любят прыгать отдыхающие дети. На каждой клетке нарисован вес – натуральное число. Выигрывает тот ребенок, который при прыжках набрал минимальный суммарный вес. В игре принимали участие $M<<L$ *(меньше на порядки)* детей, прыгающих за один ход на 1, 3, 4 или 5 клеток. Предложите наиболее оптимальный способ обработки и хранения информации для моделирования ситуации (например, для определения победителя). Примечание: прыгать на 2 клетки нельзя.

Схема решения. Для хранения данных будем использовать матрицу из $L \times L$ элементов, в элементах которой записан вес каждой клетки. Результаты детей запишем в виде массива из $L \times M$ элементов, причём элемент равен 1, если ребёнок прыгал на данную клетку, и 0 – в противном случае. Также надо записать номер дорожки, по которой он прыгал. Чтобы получить итоговый результат, надо сложить веса клеток, на которые прыгал каждый ребёнок. Для проверки соблюдения правил будем вычислять разницу между индексами элементов в каждой строке второй матрицы, содержащих значение 1. Для этого положим сначала номер предыдущей использованной клетки 0, затем при нахождении в массиве значения 1 вычисляем разницу. Если она не равна 1, 3, 4 или 5, значит, правила была нарушены. Иначе прибавляем к общему результату вес текущей клетки и запоминаем номер текущей клетки как номер предыдущей.

3. Одиннадцатиклассник Иван любит играть с калькулятором. Он часто сначала вычисляет функцию y=sin(cos(sin(cos(… sin(x)))), а затем к результату применяет обратную функцию arcsin(arccos(arcsin(… arcsin(y))). Выполнив эти действия одинаковое число раз, Иван получил в результате некоторое число. Будет ли оно исходным? Объясните, почему?

Ответ. Не будет. Возникающая в процессе вычислений погрешность, обусловленная округлением вещественных чисел при представлении в ЭВМ, изменит результат.

4. Не используя дополнительный массив или простые методы сортировок, найти в матрице значения трех первых минимальных элементов.

Схема решения. Найдём минимальный элемент массива. Далее проходим по массиву, ищем элементы, равные минимальному, и переставляем их в начало массива. Если в массиве есть три равных минимальных значения, значит, поиск можно закончить. Если же таких значений меньше трёх, надо снова найти минимальное значение, не рассматривая первые один или два элемента массива.

5. Число Фибоначчи – натуральное число, удовлетворяющее следующим соотношениям: $F_0 = 1$, $F_1 = 1$, $F_n = F_{n-1} + F_{n-2}$, $n \geq 2$. На листе бумаги нарисована таблица размером $M \times M$ клеток. Таблица разделена на 4 равных квадрата. Какие-то из клеток в квадратах заполнены натуральными числами. Посчитать число чисел Фибоначчи в правом нижнем квадрате. Число M должно быть чётным.

Схема решения. Если M – нечётное число, значит, исходные данные заданы неверно. Иначе перебираем элементы таблицы с индексами $i = M / 2 + 1 \ldots M$ и $j = M / 2 + 1 \ldots M$. Для каждого элемента, являющегося натуральным числом, надо проверить, является ли он числом Фибоначчи. Для этого найдём максимальное число в правом нижнем квадрате, построим массив чисел Фибоначчи в диапазоне от 0 до *max* и будем проверять каждое число из правого нижнего квадрата таблицы на вхождение в построенный массив.