РЕШЕНИЕ ЗАДАНИЙ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17071 для 7 класса

Задача 1.

Автопарк некоторого предприятия состоит из 5 различных машин. Подготовка одного водителя для работы на конкретном типе машины обходится в 10 000 рублей. Директор автопарка хочет обучить 8 водителей таким образом, что при отсутствии любых 3 водителей все машины можно бы было использовать в работе. Как организовать обучение с наименьшими затратами? Какова минимальная достаточная для обучения сумма?

Решение

Ясно, что на каждой машине должны уметь работать как минимум 4 водителя (иначе могут заболеть все трое, кто умеют с ней работать). Поэтому на обучение работе с каждой машиной нужно потратить как минимум 40 000 рублей, а всего на обучение уйдет не менее 200 000 рублей.

Покажем, что этой суммой можно обойтись. Действительно, можно обучить 3 водителей работе со всеми машинами, а оставшихся 5 обучить работе по одному на каждом типе машины.

Ответ: 40 000 рублей (на каждую машину).

Задача 2.

Саша, Паша и Аркаша – виртуальные бизнесмены. Саша перевел Паше в точности такое число биткоинов, которое у Паши было. После этого Саша перевел Аркаше точно такое число биткоинов, которое было у Аркаши. Затем Паша перевел и Саше, и Аркаше по такому количеству биткоинов, которое у каждого из них было до этой операции. Наконец, Аркаша перевел и Саше, и Паше по такому числу биткоинов, которое у каждого из них было в результате предыдущих действий. После всех этих выплат у каждого оказалось по 8 биткоинов. Найдите первоначальное количество биткоинов у каждого.

Решение

Так как у Саши и Паши стало по 8 биткоинов, то перед последней передачей у Саши и Паши было по 4 биткоина. Значит, перед вторым обменом у Саши было 2 биткоина, а у Аркаши 8. Поэтому у Паши было 14 биткоинов

$(4+2+8 = 14)$. Следовательно, у Паши первоначально было 7 биткоинов, у Аркаши было 4 биткоина и у Саши 13 биткоинов.

Ответ: У Паши 7, у Аркаши 4, у Саши 13.

Задача 3.

Для нумерации домов на проспекте Столетия Революции использовано 1917 табличек с цифрами. Каждая табличка содержит одну цифру; номер дома может содержать несколько цифр; дома нумеровались без пропусков, начиная с единицы. Сколько домов на проспекте?

Если записать каждый номер на одной другой табличке стандартного размера, то можно ли сложить все стандартные таблички в несколько (больше 1) стопок одинаковой высоты? Если это возможно, то каковы минимальное число стопок и максимальная высота каждой стопки?

Решение.

1. Если бы домов было 9, то потребовалось бы 9 табличек. Если бы домов было 99, то потребовалось бы 9 табличек для однозначных номеров и $90 \cdot 2$ для двузначных номеров, что все вместе дает 189 табличек.

Предположим, что все номера не более, чем трехзначны. Тогда количество x трехзначных номеров можно найти из уравнения

$$189 + x \cdot 3 = 1917$$

Оно дает $x = 576$. Вместе с 9-ю однозначными и 90-а двузначными номерами получаем 675 номеров. Домов, очевидно, столько же.

2. Разложим на множители $675 = 3^3 \cdot 5^2$. Следовательно, минимальное (большее 1) количество стопок равно 3, их высота равна $3^2 \cdot 5^2 = 225$.

Ответ: 675 домов, 3 стопки высотой в 225 табличек.

Задача 4.

Все числа $1, 2, 3, \ldots, n^2$ располагают в виде квадратной $n \times n$-таблицы. Найдите все n, для которых сумма чисел в каждой следующей строке такой таблицы на 1 больше суммы чисел предыдущей строки.

Решение.

Вначале докажем, что число n не может быть четным. Рассуждаем от противного. Пусть $n = 2k (k \in N)$ и S – сумма чисел в первой строке. Подсчитываем сумму всех чисел таблицы двумя способами. Первый – складывая все числа от 1 до $4k^2$ включительно, а второй – производя суммирование по строкам. Получим следующее равенство:

$$1 + 2 + ... + 4k^2 = S + (S + 1) + ... + (S + 2k - 1),$$

то есть

$$(1 + 4k^2) \cdot 2k^2 = 2kS + (2k - 1)k,$$

откуда следует, что $8k^4 = k(2S - 1)$ и $8k^3 = 2S - 1$ – противоречие. Таким образом, число n должно быть нечётным.

Для любого нечётного числа n, начиная с 3, укажем требуемую расстановку чисел в таблицу $n \times n$. Ниже на рисунке пример приведён для $n = 5$. При больших значениях расстановка «змейкой» производится аналогично.

1	10	11	20	21	$\Sigma_1 = 63$
2	9	12	19	22	$\Sigma_2 = 64$
3	8	13	18	23	$\Sigma_3 = 65$
4	7	14	16	24	$\Sigma_4 = 66$
5	6	15	16	25	$\Sigma_5 = 67$

Ответ: все нечетные натуральные n.

Задача 5.

Даны числа $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{2018}$. Известно, что $x_1 = 1/2$ и

$$x_n = \frac{x_{n-1}}{2nx_{n-1} + 1} \quad \text{для} \quad n = 2, \ldots, 2018.$$

Найдите сумму $x_1 + x_2 + \cdots + x_{2018}$.

Решение.

Введём в рассмотрение последовательность $y_n = 1/x_n$. Для нее рекуррентное соотношение переписывается в виде

$$y_n = y_{n-1} + 2n.$$

Значит,

$$y_n = 2 + 4 + ... + 2n = n(n + 1),$$

откуда

$$x_n = \frac{1}{n(n+1)} = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}.$$

Складывая такие числа по всем n от 1 до 2018 получаем, что сумма равна

$$1 - \frac{1}{2019} = \frac{2018}{2019}.$$

Ответ: $\frac{2018}{2019}$.