МАТЕРИАЛЫ ЗАДАНИЙ ОТБОРОЧНОГО ЭТАПА
Олимпиады школьников "Надежда энергетики" в 2017/18 учебном году

МАТЕМАТИКА

ЗАДАЧА 1 (ДЛЯ 8 КЛАССА). Решите уравнение в целых числах

$$20(X+1)^2 + 17(Y-2)^2 = 2017.$$

РЕШЕНИЕ. Положим $M = X+1$, $N = Y-2$. Тогда

$$20M^2 + 17N^2 = 2017. \quad (1)$$

Это остается в силе при смене знака каждой из переменных M, N, поэтому будем искать только неотрицательные M, N .

1. Заметим, что $M \neq 0$, так как 2017 не кратно 17. Число 2017 также не кратно 20, поэтому и $N \neq 0$. Итак, $MN \neq 0$.

2. Имеем $20M^2 > 0$, поэтому $17N^2 < 2017$ и $N^2 < 2017/17 < 119$. Число N целое, следовательно,

$$1 \leq N \leq 10. \quad (2)$$

3. Десятичная запись целого числа $20M^2$ оканчивается цифрой 0, поэтому $17N^2$ должно, как и 2017, оканчиваться цифрой 7. Квадрат целого числа оканчивается цифрами 0,1,4,5,6,9, к-рым соответствует последняя цифра 0,7,8,5,2,3 числа $17N^2$. Значит, последняя цифра числа N^2 однозначно 1, а у числа N — либо 1, либо 9.

4. С учетом (2) получаем $N = 1$ или $N = 9$. Если $N = 9$, то $20M^2 = 2017 - 17 \cdot 81 = 640$, $M^2 = 32$, что невозможно. Поэтому однозначно $N = 1$ и $M = 10$. Всего имеем ровно 4 решения уравнения (1): $(M; N) = (\pm 10; \pm 1)$, откуда, возвращаясь к переменным X, Y, получаем

ОТВЕТ. $(X; Y) = (-11; 1), (-11; 3), (9; 1), (9; 3)$.

ЗАДАЧА 2 (ДЛЯ 11 КЛАССА). За год цены на энергоносители изменились по закону $y = 2ax^3 + ax^2$, где x — прежняя цена, y — новая цена, a — параметр, задаваемый производителем. Могут ли при этом все цены из интервала $(100; 200)$ остаться в нем же?

РЕШЕНИЕ. Положим $y = y(x) = 2ax^3 + ax^2$, $b = 100$, $c = 200$.

Если $a \le 0$, то $y \le 0$, не попадает в интервал $(b; c)$.

Пусть $a > 0$. Тогда функция $y(x)$ возрастает, поэтому $y(b) < y(x) < y(c)$. Для попадания y в интервал $(b; c)$ необходимо и достаточно, чтобы для всех x из $(b; c)$ выполнялись нер-ва $y(b) \ge b$, $y(c) \le c$. Преобразуем их:

$$2ab^3 + ab^2 \ge b,\ 2ac^3 + ac^2 \le c \quad \Leftrightarrow \quad ab^2 + ab \ge 1,\ 2ac^2 + ac \le 1 \quad \Leftrightarrow$$

$$\frac{1}{2b^2 + b} \le a \le \frac{1}{2c^2 + c},$$

что невозможно, так как $b < c$.

ОТВЕТ: не могут.

ЗАДАЧА 3 (ДЛЯ 11 КЛАССА).

Техническое устройство состоит из трех агрегатов, их энергопотребление

$$E_1 = \sqrt{\rho^2 + 2t^2 - 5}, \quad E_2 = \sqrt{3\rho^2 + 2t^2 - 6}, \quad E_3 = 2\sqrt{\rho^2 + t^2 + 1}$$

зависит от плотности ρ и температуры t окружающей среды. Каково минимальное суммарное энергопотребление всех трех агрегатов и при каких значениях параметров ρ, t оно достигается?

РЕШЕНИЕ. Обозначим подкоренные выражения в E_1 и E_2 через a и b. Тогда $E_3 = \sqrt{a + b + 15}$, а суммарное энергопотребление

$$E(a, b) = E_1 + E_2 + E_3 = \sqrt{a} + \sqrt{b} + \sqrt{a + b + 15}.$$

Все три слагаемых неотрицательны и возрастают с ростом a и b, поэтому минимальное значение функция $E(a, b)$ принимает при $a = b = 0$, оно равно $\sqrt{15}$. Остается решить систему уравнений $a(\rho, t) = b(\rho, t) = 0$ относительно ρ и t. При этом учтем, что $\rho > 0$ (это плотность).

ОТВЕТ. $\sqrt{15}$ при $\rho = \dfrac{1}{\sqrt{2}}$, $t = \pm\dfrac{3}{2}$.

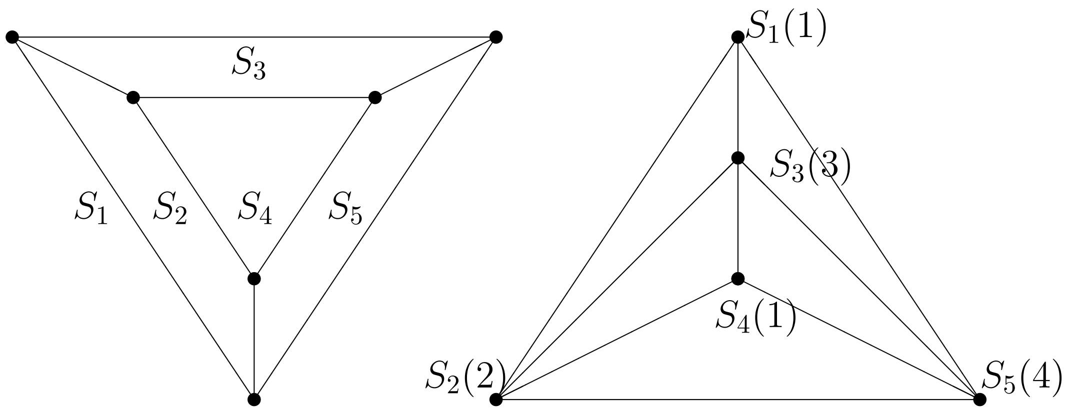
ЗАДАЧА 4 (ДЛЯ 10 КЛАССА).

Грани усеченной треугольной пирамиды требуется раскрасить так, что любые две смежные грани (т. е. имеющие общий отрезок) получают разные цвета.

А. Каково минимальное число цветов, достаточное для такой раскраски?

Б. Сколькими способами можно получить такую раскраску с минимальным числом цветов?

РЕШЕНИЕ. Изобразим пирамиду (вид сверху).



Занумеруем грани: $S_1, \ldots, S_5$. Невидимая сверху нижняя грань пирамиды обозначена как внешность S_1 большого треугольника. Для наглядного изображения смежности граней построим диаграмму, на к-рой граням соответствуют точки, а смежным граням — отрезки, соединяющие точки. Задача сводится к раскраске всех 5 точек так, что концы каждого отрезка окрашиваются в разные цвета. В силу наличия треугольников необходимо не менее 3 цветов. Будем строить раскраску наименьшим числом цветов.

1. Точкам S_1, S_2, S_3, образующим треугольник, припишем различные цвета 1, 2, 3.

2. Тогда точка S_5, соединенная и с S_1, и с S_2, и с S_3, получает обязательно четвертый цвет 4.

3. Осталась неокрашенной только точка S_4. Ее цвет должен быть отличен от 2,3,4, это цвет 1.

Все остальные способы раскраски получаются перестановками цветов 1, 2, 3, 4. Имеется ровно $4! = 24$ перестановок и такое же кол-во способов раскраски.

ОТВЕТ: 4 цвета, 24 способа.

ЗАДАЧА 5 (ДЛЯ 7 КЛАССА). На пост мэра Цветочного города претендуют 15 коротышек. Каждый кандидат должен ровно один раз встретиться с каждым из остальных и провести с ним предвыборные дебаты — спор о смысле жизни в Цветочном городе.

A. Сколько всего встреч (дебатов) должно состояться?

B. Может ли в некоторый момент оказаться, что все участники провели по 3 встречи?

C. Может ли в некоторый момент оказаться, что все участники провели по различному количеству встреч?

РЕШЕНИЕ.

A. Должно состояться ровно $15(15-1)/2 = 105$ попарных встреч кандидатов.

B. Если каждый участник (кандидат) провел в некоторый момент по 3 встречи, то суммарное число всех проведенных встреч $15 \cdot 3 = 45$ нечетно. Но оно должно быть ровно в 2 раза быть больше числа всех проведенных в этот момент встреч, т. е. четно. Противоречие, это невозможно.

C. Максимальное число встреч, проведенных одним кандидатом из 15, есть 14. Если все провели по разному числу встреч, то эти числа равны $0, 1, 2, \ldots, 14$. В силу наличия числа 0, максимальное число встреч одного участника не может быть равно 14. Противоречие, это невозможно.

ОТВЕТ. A. 105. B и C — не может.

ЗАДАЧА 6 (ДЛЯ 7 КЛАССА). Нормы медицинского обслуживания предписывают каждому стоматологу принимать постоянное целое (но большее 1) число пациентов в час. Количество часов в рабочем дне стоматолога целое, оно больше числа пациентов, принимаемых им за час, но меньше числа стоматологов в поликлинике и не больше 8. Сколько длится рабочий день и сколько стоматологов в клинике, если за день клиника принимает 357 стоматологических больных?

РЕШЕНИЕ. Пусть врач принимает k больных в час, рабочий день длится m ($2 \le m \le 8$ и m целое) часов и в клинике n врачей. Все вместе они за день принимают $kmn = 357$ пациентов. Число 357 однозначно раскладывается на 3 множителя $357 = kmn = 3 \cdot 7 \cdot 17$, удовлетворяющих условиям задачи.

ОТВЕТ: 7 часов, 17 стоматологов.

ЗАДАЧА 7 (ДЛЯ 10 КЛАССА). Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 3x_1 = 2x_2^3 + 1, \\ 3x_2 = 2x_3^3 + 1, \\ 3x_3 = 2x_4^3 + 1, \\ 3x_4 = 2x_1^3 + 1. \end{cases}$$

РЕШЕНИЕ. Пусть $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = x$, тогда получаем одно уравнение $2x^3 - 3x + 1 = 0$, $(x-1)(2x^2 + 2x - 1) = 0$. Его решения $x = 1$ и $x = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

Покажем, что других решений нет. Пусть x_1, x_2, x_3, x_4 - решение, и, например, $x_1 \neq x_2$. Функция $y = \dfrac{2x^3+1}{3}$ строго возрастает. Если $x_2 > x_1$, то из 1-го и 4-го уравнений получаем $x_1 > x_4$. Тогда из 3-го и 4-го уравнений имеем $x_4 > x_3$. Далее аналогично получаем $x_3 > x_2$, т.е. $x_1 > x_2$. Противоречие.

ОТВЕТ. Два решения: $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = 1$ и $x_1 = x_2 = x_3 = x_4 = \dfrac{-1 \pm \sqrt{3}}{2}$.

ЗАДАЧА 8 (ДЛЯ 9 КЛАССА). Уравнение $x^2 + b|x| + c = 0$ имеет 4 попарно различных корня. Их произведение равно P, сумма модулей корней равна S. Найдите коэффициенты b и c.

РЕШЕНИЕ. Пусть $x_1, \ldots, x_4$ — корни исходного уравнения, положим $y = |x|$. Тогда исходное уравнение становится квадратным: $y^2 + by + c = 0$. Последнее имеет два положительных корня y_1, y_2, где $y_2 > y_1 > 0$, и дискриминант $D = b^2 - 4c > 0$. Пусть $x_1 = -y_1$, $x_2 = y_1$, $x_3 = -y_2$, $x_4 = y_2$. Тогда по условию имеем $S = |x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| = 2(y_1 + y_2) = 2(-b)$ и, следовательно, $b = -S/2$.

В силу другого условия задачи имеем

$$P = x_1 x_2 x_3 x_4 = -y_1^2(-y_2^2) = (y_1 y_2)^2 = c^2.$$

Очевидно, $S > 0$ и, следовательно, $b < 0$. Из условия $y_1 = (-b - \sqrt{D})/2 > 0$ получаем $\sqrt{b^2 - 4c} < -b$. С учетом положительности $-b$, возведя обе части последнего нер-ва в квадрат, приходим к нер-ву $b^2 - 4c < b^2$, откуда $c > 0$. Таким образом, $b = -S/2, \quad c = \sqrt{P}$.

ОТВЕТ. $b = -S/2$, $c = \sqrt{P}$.

ЗАДАЧА 9 (ДЛЯ 11 КЛАССА). Найдите наименьшее натуральное n такое, что

$$\sin(2n^\circ) = \sin(2017n^\circ).$$

РЕШЕНИЕ. Имеем

$$\sin x = \sin y \;\Leftrightarrow\; (x = y + 360^\circ k \;\text{ или }\; x = 180^\circ - y + 360^\circ k, \quad k \in \mathbb{Z}) \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; (x - y = 360^\circ k \;\text{ или }\; x + y = 180^\circ(2k+1), \quad k \in \mathbb{Z}).$$

Если $x = 2017n^\circ$, $y = 2n^\circ$, то $x - y = 2015n^\circ$, $x + y = 2019n^\circ$, поэтому получаем совокупность уравнений в натуральных числах

$$\left[\begin{array}{lcl} 2015n & = & 360k, \\ 2019n & = & 180(2k+1). \end{array}\right.$$

Сократив первое на 5, второе — на 3, получим

$$\left[\begin{array}{lcll} 403n & = & 72k, & \qquad (1) \\ 673n & = & 60(2k+1). & \qquad (2) \end{array}\right.$$

Числа 403 и 72 взаимно простые, поэтому из (1) находим $n = 72$. Далее, числа 673 и 60 также взаимно простые и из (2) находим $n = 60$. Выбирая минимум из 72 и 60, получаем

ОТВЕТ: $n = 60$.

ЗАДАЧА 10 (ДЛЯ 10 КЛАССА).

Андреевский флаг в виде синего креста, расположенного вдоль диагоналей белого прямоугольника с соотношением сторон 2 : 3, является с 1992 г., как и в 1699 – 1917 годах официальным военно-морским флагом России. (Он назван в честь апостола Андрея Первозванного, покровителя мореплавателей и рыбаков, распятого, по христианскому преданию, на косом кресте.) Толщина каждой перекладины синего креста в 10 раз меньше длины флага, а ось перекладины совпадает с диагональю флага.

Найдите отношение площадей белой и синей частей флага.

РЕШЕНИЕ.

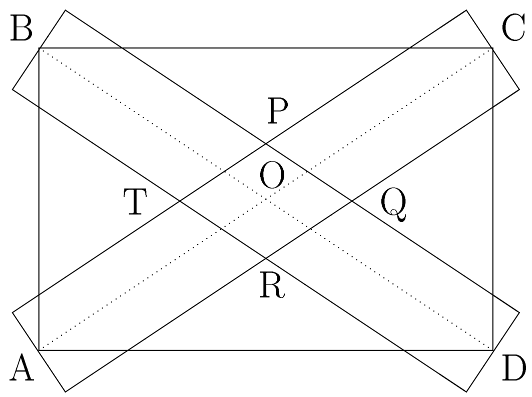


рис. 1

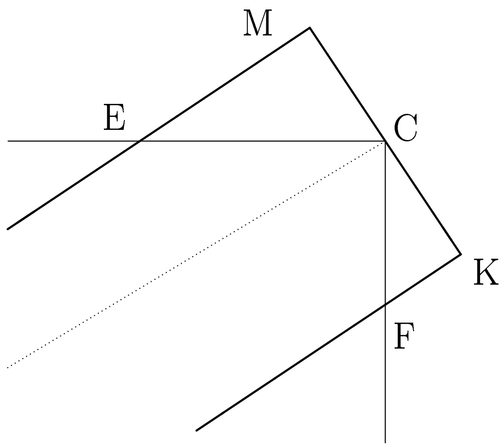


рис 2.

Флаг без соблюдения пропорций изображен на рис. 1. Диагональные полосы флага продлены за границы полотнища до образования прямоугольников. На рис. 2 увеличен правый верхний угол.

В задаче важно отношение площадей, поэтому реальные размеры флага значения не имеет. Полагаем, что длина флага равна $b = 3$ ед. длины, а ширина — $a = 2$ ед. Тогда толщина перекладин креста равна $h = b/10 = 0,3$ ед., а диагональ флага — $d = \sqrt{a^2 + b^2}$.

Найдем площади отдельных частей.

1. Площадь S_1 синей полосы вдоль одной диагонали равна площади достроенного прямоугольника за вычетом площадей четырех треугольников, выступающих за края флага. Треугольники попарно равны, поэтому

$$S_1 = h\,d - 2S(EMC) - 2S(CKF).$$

Пусть $\alpha = \angle CAD$. Тогда $\operatorname{tg}\alpha = \dfrac{a}{b}$. Из подобия прямоугольных треугольников имеем $\angle CEM = \angle FCK = \alpha$.

По условию $MC = CK = h/2$, $S(EMC) = \dfrac{h^2}{8}\operatorname{ctg}\alpha$, $S(FCK) = \dfrac{h^2}{8}\operatorname{tg}\alpha$. Следовательно,

$$S_1 = h\sqrt{a^2+b^2} - \frac{h^2}{4}\left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right).$$

2. Площадь S_2 ромба на пересечении перекладин креста.

Высота ромба равна толщине перекладины h. Острый угол между сторонами есть угол между диагоналями и равен 2α. Таким образом,

$$S_2 = h\cdot\frac{h}{\sin 2\alpha} = \frac{h^2}{2\sin\alpha\cos\alpha} = \frac{h^2\left(a^2+b^2\right)}{2ab}.$$

3. Площадь S_3 всей синей части флага равна

$$S_3 = 2S_1 - S_2 = 2h\sqrt{a^2+b^2} - \frac{2h^2}{4}\cdot\frac{a^2+b^2}{ab} - \frac{h^2\left(a^2+b^2\right)}{2ab}.$$

4. Площадь белой части найдем как дополнение синей части:

$$S_4 = ab - S_3 = ab - 2h\sqrt{a^2+b^2} + h^2\cdot\frac{a^2+b^2}{ab}.$$

5. Остается подставить числовые значения:

$$S_1 = \frac{240\sqrt{13}-39}{800},\quad S_2 = \frac{39}{400},\quad S_3 = \frac{120\sqrt{13}-39}{200},\quad S_4 = \frac{1239-120\sqrt{13}}{200}.$$

ОТВЕТ. Отношение указанных площадей равно $\dfrac{1239-120\sqrt{13}}{120\sqrt{13}-39}$.

ЗАДАЧА 11 (ДЛЯ 11 КЛАССА). Многочлен

$$f(x) = x^2 + px + q$$

имеет корни $f(0)$ и $f(1)$. Найдите все такие многочлены $f(x)$ и решите неравенство $(0,1)^{f(x)} < 10$.

РЕШЕНИЕ. Имеем $x_1 = f(0) = q$ и $x_2 = f(1) = 1 + p + q$. Рассмотрим два случая.

Первый случай: $x_1 = x_2$. Тогда $q = 1 + p + q$, откуда $p = -1$. Значит, $f(x_1) = f(q) = q^2 - q + q = 0$, т. е. $q = 0$. В этом случае $f(x) = x^2 - x$.

Второй случай: $x_1 \neq x_2$. Тогда по теореме Виета $x_1 + x_2 = 1 + p + 2q = -p$, откуда $p = -(q + \frac{1}{2})$. Поскольку $f(x_1) = f(q) = q^2 + pq + q = q^2 - q(q + \frac{1}{2}) + q = 0$, то $q = 0$ и $p = -\frac{1}{2}$. В этом случае $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x$.

Неравенство эквивалентно следующему $10^{-f(x)} < 10$, откуда $f(x) > -1$. Это верно для любых x в обоих случаях.

ОТВЕТ: $f(x) = x^2 - x$ или $f(x) = x^2 - \frac{1}{2}x$; $x \in \mathbb{R}$.

ЗАДАЧА 12 (ДЛЯ 9 КЛАССА). Зимний дворец (четвертый) в Петербурге возведен Франческо Бартоломео Растрелли в 1754–1762 гг. для императрицы Елизаветы Петровны. Окон в нем на 1828 больше, чем лестниц, а комнат и лестниц вместе 1617. Если число лестниц увеличить в 10 раз, то результат будет на 775 меньше числа окон. Найдите количество комнат, окон и лестниц.

РЕШЕНИЕ. Пусть x, y, z — число окон, комнат и лестниц соответственно. Тогда условия задачи описываются уравнениями

$$x - z = 1828,\ (1) \qquad y + z = 1617,\ (2) \qquad x - 10z = 775.\ (3)$$

Вычитая (3) из (1), получим уравнение с одним неизвестным $9z = 1053$. Из него находим $z = 117$. Тогда из (1) получаем $x = 1828 + z = 1945$ и из (2) находим $y = 1617 - z = 1500$.

ОТВЕТ: 1500 комнат, 1945 окон, 117 лестниц.

ЗАДАЧА 13 (ДЛЯ 8 КЛАССА). В ночь с 3 на 4 декабря 2017 года состоялось "суперлуние": полная Луна находилась около самой близкой к Земле точки своей эллиптической орбиты. В прессе сообщалось, что размер видимого с Земли лунного диска увеличился на 21 %, но не уточнялось, какой именно размер. Если предположить, что размером является площадь, то на сколько процентов увеличился диаметр?

РЕШЕНИЕ. Даже не зная формулы для площади круга, задачу можно решить, если четко представлять себе квадратичный характер зависимости площади от линейного размера симметричной фигуры (правильного многоугольника, в пределе — круга) и смысл процентов. Пусть d_0 и d — диаметры исходного и измененного кругов, S и S_0 — их площади. Площадь круга пропорциональна квадрату диаметра с нек-рым коэффициентом пропорциональности k. Имеем $S = kd^2 = (1 + 0,21)S_0 = 1,21kd_0$. Сократив на k, получим $d^2 = 1,21d_0^2$, откуда $d = 1,1d_0$, т. е. диаметр увеличился на 10%.

ОТВЕТ: 10%.

ЗАМЕЧАНИЕ. Задача предлагалась на этапе, состоявшемся в ближайшие после этого "суперлуния" выходные. Данные прессы изменены для облегчения вычислений, реально сообщалось об увеличении размера (без уточнения какого) на 15%.

ЗАДАЧА 14 (ДЛЯ 10 КЛАССА). Целой частью $\lfloor x \rfloor$ действительного числа x называется наибольшее целое M такое, что $M \le x$. Решите уравнение $\sqrt{\lfloor x/3-2 \rfloor} = \lfloor \sqrt{x/3-2} \rfloor$.

РЕШЕНИЕ. Введем переменную $y = x/3-2$. При этом $y \ge 0$. Уравнение примет вид

$$\sqrt{\lfloor y \rfloor} = \lfloor \sqrt{y} \rfloor. \tag{1}$$

Если $y = n^2$, где n целое, то левая и правая части уравнения (1) равны n.

Пусть $n^2 < y < (n+1)^2$. Тогда $n < \sqrt{y} < n+1$ и правая часть равна $\lfloor y \rfloor = n$. Уравнение (1) принимает вид $\sqrt{\lfloor x \rfloor} = n$. Возведем в квадрат: $\lfloor y \rfloor = n^2$. Это равносильно нер-вам $n^2 \le y < n^2 + 1$.

Таким образом, $y \in \bigcup_{n=0}^{\infty} [n^2; n^2+1)$.

Возвращаясь к прежней переменной $x = 3(y+2)$, получаем

ОТВЕТ: $x \in \bigcup_{n=0}^{\infty} [3(n^2+2); 3(n^2+3))$.

ЗАДАЧА 15 (ДЛЯ 9 КЛАССА). В выпуклом 1010-угольнике $A_1A_2\ldots A_{1010}$ стороны A_1A_2 и A_3A_4 продолжили до пересечения в точке B_2; то же сделали с парами сторон A_2A_3 и A_4A_5 (получили точку B_3), … , $A_{1009}A_{1010}$ и A_1A_2 (получили точку B_{1010}), $A_{1010}A_1$ и A_2A_3 (получили точку B_1).

В итоге образовалась "звёздочка" $A_1B_1A_2B_2A_3B_3A_4\ldots B_{1010}A_1$. Найдите сумму углов $B_1,\ B_2,\ \ldots\ ,\ B_{1010}$ этой "звёздочки".

РЕШЕНИЕ. Сумма всех внутренних углов n-угольника равна $S=(n-2)\cdot 180^\circ$. В нашем случае $n=1010$.

Для всех смежных углов имеем $\sum\limits_i \angle B_iA_iA_{i+1}=\sum\limits_i(180^\circ-\angle A_{i-1}A_iA_{i+1})=$ $=n\cdot 180^\circ-S=n\cdot 180^\circ-(n-2)\cdot 180^\circ=360^\circ$ (индексы слагаемых должны учитывать цикличность нумерации: $A_{n+1}=A_1$). Аналогично, сумма $\angle B_1A_2A_1+$ $+\angle B_2A_3A_2+\ldots$ тоже равна 360°. Сумма всех углов треугольников $\triangle B_1A_1A_2$, $\triangle B_2A_2A_3$, …, равна, очевидно, $n\cdot 180^\circ$. Значит, искомая сумма углов равна $n\cdot 180^\circ-2\cdot 360^\circ=(n-4)\cdot 180^\circ=1006\pi$.

ОТВЕТ: 1006π $(181\,080^\circ)$.

ЗАДАЧА 16 (ДЛЯ 9 КЛАССА). В некоторой области для обеспечения электричеством удаленных районов работают гидрогенераторы двух типов, суммарной мощностью 7000 кВт. Если бы все генераторы были первого типа, то суммарная мощность была бы на 1000 кВт больше. Если бы все генераторы были второго типа, то суммарная мощность была бы на 3000 кВт меньше. Какова суммарная мощность генераторов каждого типа?

РЕШЕНИЕ. Пусть имеется m генераторов первого типа мощностью X кВт каждый и n генераторов второго типа мощностью Y кВт каждый. Тогда

$$mX+nY=7000,\ (1)\qquad mX+nX=8000,\ (2)\qquad mY+nY=4000.\ (3)$$

Вычитая (1) из (2) и (3) из (1), получим $nX-nY=1000$ и $mX-mY=3000$. Поэтому $\dfrac{n(X-Y)}{m(X-Y)}=\dfrac{1000}{3000}$, т. е. $\dfrac{n}{m}=\dfrac{1}{3}$. Подставим $m=3n$ в (3): $3nY+nY=4000$, тогда $nY=1000$ и из (1) получаем $mX=7000-1000=6000$.

ОТВЕТ: 6000 кВт и 1000 кВт.

ЗАДАЧА 17 (ДЛЯ 7 КЛАССА). В пакетике 100 леденцов красного, зеленого, желтого и оранжевого цвета. Если наугад вынуть из него 90 леденцов, то среди них непременно будут леденцы всех четырех цветов. Какое наименьшее количество леденцов наугад следует вынуть из пакетика, чтобы среди них обязательно были леденцы всех трех цветов?

Решение. Леденцов одного цвета должно быть не меньше 11, иначе все они могут оказаться невыбранными. Тогда леденцов двух цветов должно быть не менее 22 (по 11 каждого цвета). Значит, надо выбрать минимум 79 леденцов. 78 леденцов недостаточно, так как при 22 леденцах двух цветов остальные могут быть тоже только двух цветов.

ОТВЕТ: 79.

ЗАДАЧА 18 (ДЛЯ 8 КЛАССА). Имеется два аккумулятора одинаковой емкости. На первом техническом устройства аккумулятор разряжается за 40 ч непрерывной работы, а на втором — за 60 ч. Аккумуляторы можно менять местами. Какое наибольшее время работы двух устройств могут обеспечить два таких аккумулятора?

РЕШЕНИЕ. Пусть данный аккумулятор прослужит ровно X ч на первой установке и Y ч на второй. Оба устройства должны все время работать совместно, поэтому выполняется равенство

$$\frac{X}{40}+\frac{Y}{60}=\frac{X}{60}+\frac{Y}{40},$$

в котором левая часть описывает износ первого аккумулятора, а правая часть — второго. Отсюда следует, что $X=Y$. Полная разрядка аккумулятора означает равенство $\frac{X}{40}+\frac{X}{60}=1$, откуда $X=24$. Тогда время работы каждого из аккумуляторов есть $2X=48$.

ОТВЕТ: 48 часов.

ЗАДАЧА 19 (ДЛЯ 8 КЛАССА). Слова, как известно, имеют вес. Положительный вес имеет каждая буква, этот вес постоянен во всех сочетаниях, содержащих данную букву. Вес слова равен сумме весов всех входящих в него букв.

A. Найдутся ли такие веса букв, что "килограмм" имеет такой же вес, как "миллиграмм"? Сформулируйте условие, необходимое и достаточное для равенства этих весов, или докажите невозможность равенства.

B. Можно ли найти два слова из множества $M = \{$"килограмм", "миллиграмм", "эпиграмма"$\}$, имеющие одинаковый вес при любых весах букв? Найдите все такие пары или докажите, что их нет.

C. Можно ли разбить множество M на блоки, вес которых одинаков при любых весах букв? Найдите все такие разбиения или докажите, что их не существует.

РЕШЕНИЕ. Пусть w(s) — вес каждой буквы s алфавита.

A. Удалим из слов "килограмм" и "миллиграмм" буквы, входящие в оба слова, получим части "ко" и "млли". Приравняем суммы весов таких частей, получим необходимое и достаточное условие равновесия таких слов :
w(к)+w(о)=w(м)+2w(л)+w(и). (*)

B. Из 3 слов можно образовать 3 пары. Каждую пару "сократим"на повторяющиеся буквы, как при решении части A. Так, из слов "килограмм" и "миллиграмм" получим части "ко" и "млли". Если суммы w(к)+w(о) и w(м)+2w(л)+w(и) не равны (и такие веса букв найдутся), то слова "килограмм" и миллиграмм" имеют различный вес.

Аналогично показывается, что найдутся веса букв, при которых слова "килограмм"и "эпиграмма", а также слова "миллиграмм" и "эпиграмма" имеют разный вес. Итак, для каждой пары слов найдутся веса букв, при которых слова пары имеют разный вес.

C. Множество $\{x, y, z\}$ можно разбить на 2 или 3 блока: $x|y|z$, $xy|z$, $xz|y$, $x|yz$. В качестве x, y, x рассмотрим слова задачи. Для первого разбиения уже показано, что существуют веса букв, при которых веса двух из трех блоков разбиения различны. В каждом из остальных трех разбиений на два блока эти блоки содержат разное число букв, поэтому, в частности, при равенстве весов всех букв алфавита вес блоков различен. Итак, ответ на вопрос C — "Нет".

ОТВЕТЫ. A. Да, необходимо и достаточно условие (*). B и C — нет.

ЗАДАЧА 20 (ДЛЯ 11 КЛАССА). Опишите множество всех точек (x, y) координатной плоскости, удовлетворяющих условиям

$$[2x - 3y] = 2[x] - 3[y], \qquad [2x + 3y] = 2[x] + 3[y],$$

где $[z]$ означает целую часть действительного числа z.

РЕШЕНИЕ. Представим числа x, y в виде $x = M + x_0$, $y = N + y_0$, где $M = [x]$, $N = [y]$ — их целые, x_0, y_0 — дробные части, $x_0, y_0 \in [0; 1)$. Справедливы соотношения

$$[2x \pm 3y] = [2(M + x_0) \pm 3(N + y_0)] = (2M \pm 3N) + [2x_0 \pm 3y_0],$$

$$2[x] \pm 3[y] = 2[M + x_0] \pm 3[N + y_0] =$$
$$= (2M \pm 3N) + (2[x_0] \pm 3[y_0]) = (2M \pm 3N) + (2x_0 \pm 3y_0),$$

поэтому исходные уравнения сводятся к уравнениям $[2x_0 \pm 3y_0] = 2x_0 \pm 3y_0$, эквивалентным условиям $2x_0 \pm 3y_0 \in [0; 1)$. Таким образом, имеем систему неравенств для x_0, y_0:

$$0 \leq x_0 < 1, \quad 0 \leq y_0 < 1, \quad 0 \leq 2x_0 \pm 3y_0 < 1.$$

Преобразуем неравенства:

$$\frac{2x_0 - 1}{3} \leq y_0 < \frac{1 - 2x_0}{3}, \qquad y_0 \leq \frac{2x_0}{3}, \qquad x_0 < \frac{1}{2}.$$

Область на плоскости (x_0, y_0) ограничена прямыми и представляет собой треугольник OAB с вершинами $O(0; 0)$, $A(1/2; 0)$, $B(1/4; 1/6)$ без стороны AB.

Тогда на плоскости (x, y) область представляет собой объединение всех таких треугольников, вырезанных из единичных квадратов с целочисленными координатами вершин. Точнее, область является объединением треугольников $O_{MN}A_{MN}B_{MN}$, $O_{MN}(M; N)$, $A_{MN}(M + 1/2; N)$, $B_{MN}(M + 1/4, N + 1/6)$ без стороны $A_{MN}B_{MN}$, определенных для каждой пары целых чисел (M, N).

ОТВЕТ: объединение треугольников $O_{MN}A_{MN}B_{MN}$ с вершинами $O_{MN}(M; N)$, $A_{MN}(M+1/2; N)$, $B_{MN}(M+1/4; N+1/6)$ без стороны $A_{MN}B_{MN}$, определенных для каждой пары целых чисел (M, N).