ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17111 для 11 класса

Задача 1.

Числовая характеристика x некоторого теплоэнергетического процесса является корнем уравнения

$$x^3 - 3x = t,$$

где t — температура окружающей среды, измеряемая в градусах Цельсия. По некоторым технологическим соображениям корень должен быть единственным. При каких значениях t уравнение имеет единственный корень x_0? Оцените снизу абсолютную величину этого корня и покажите, что полученную оценку улучшить нельзя.

Решение.

Нетрудно построить график функции $y = x^3 - 3x$, заметив, что эта функция нечетная, обращается в 0 ровно в трех точках $x = 0, \pm\sqrt{3}$, $(1; -2)$ является точкой минимума, а $(-1; 2)$ является точкой максимума, функция неограниченно возрастает при $x > 1$ и неограниченно убывает при $x < -1$. Таким образом, число корней равно
3, если $|t| < 2$,
2, если $|t| = 2$,
1, если $|t| > 2$.
Единственный корень есть в точности при $|t| > 2$.

Далее оценим абсолютную величину корня x при $|t| > 2$. Из графика видно, что $|x| > \sqrt{3}$. Можно получить и более точную оценку, рассматривая неравенства $x^3 - 3x > 2$ при $t > 2$ и $x^3 - 3x < -2$ при $t < -2$. Замечая, что $x^3 = 2 + 3x$ при $x = 2$, а также $x^3 = -2 + 3x$ при $x = -2$, находим $|x| > 2$.

Допустимо также геометрическое решение, основанное на том наблюдении, что предельный (промежуточный) случай двух корней соответствует ситуации, когда одним из корней является точка экстремума.

Ответ.

Уравнение имеет единственный корень в точности при $|t| > 2$.
Для этого корня справедливо нер-во $|x| > 2$.

Задача 2.

Для каждого целого значения параметра K решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2[x] + y = 3/2, \\ ([x] - x)^2 - 2[y] = K. \end{cases}$$

Здесь $[x]$ означает целую часть числа x.

Решение.

Пусть

$$x = M + a, \quad y = N + b, \quad M, N \in \mathbb{Z}, \qquad a, b \in [0; 1).$$

Из первого уравнения получаем $2M + N + b = 3/2$ и тогда

$$b = 0,5, \qquad N = 1 - 2M.$$

Подставим эти значения во второе уравнение:

$$(-a)^2 - 2(1 - 2M) = K.$$

Тогда

$$a = 0, \qquad K = 4M - 2, \qquad x = M, \qquad y = 3/2 - 2M.$$

Ответ.

Если $K = 4M - 2$, где $M \in \mathbb{Z}$, то $x = M$, $y = 3/2 - 2M$.
При других K решений нет.

Задача 3.

Две равные окружности пересекаются в точках P и Q. Произвольная прямая, проходящая через Q, повторно пересекает окружности в точках A и B, а касательные к окружностям в этих точках пересекаются в точке C. Докажите, что отрезки AQ и CB видны из точки P под одинаковыми углами.

Решение. По теореме об угле между касательной и хордой $\angle BAC = \angle QPA$, $\angle CBA = \angle BPQ$. Следовательно, $\angle BPA + \angle ACB = \angle BAC + \angle ACB + \angle CBA = \pi$, т.е. четырехугольник $APBC$ вписанный (рис.1). Значит, $\angle BPC = \angle BAC = \angle QPA$, ч.т.д.

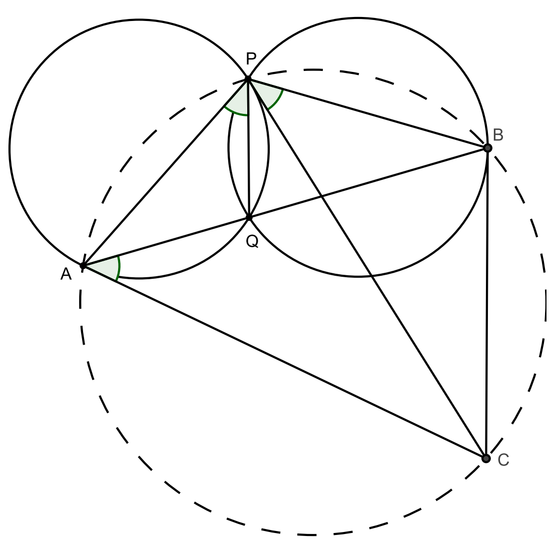


Рис.1.

Другие случаи расположения точек рассматриваются аналогично, например, на рис.2 $\angle ACB = \angle CAQ - \angle CBQ = (\pi - \angle QPA) - (\pi - \angle QPB) = \angle APB$ и $\angle QPA = \angle BAC = \angle BPC$.

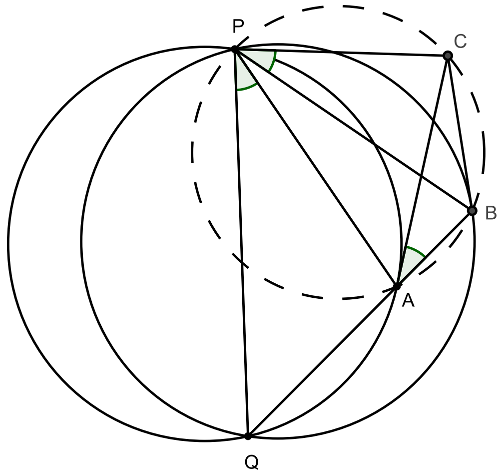


Рис.2.

Задача 4.

При обработке числовых данных часто приходится вычислять среднее арифметическое

$$S(x, y) = (x + y)/2$$

и решать уравнения, содержащие среднее арифметическое. Найдите все конечные (состоящие из конечного числа элементов) числовые множества X такие, что для любых a и b из X множество X содержит корень x уравнения

$$S(a, x) = b.$$

Решение. Имеем

$$S(a, x) = b \;\Leftrightarrow\; x = 2b - a. \tag{1}$$

Требуемым в условии задачи свойством обладает любое одноэлементное множество

$$X = \{a\}, \quad a \in (-\infty; \infty), \tag{2}$$

так как $S(a, a) = a$.

Допустим далее, что множество X содержит по крайней мере два различных элемента c, d, причем $c < d$ (без ограничения общности). Для уравнения $S(d, x) = c$ находим, согласно (1), $x = 2c - d$. Затем для уравнения $S(d, x) = 2c - d$ получаем $x = 4c - 3d$, после чего рассматриваем уравнение $S(d, x) = 4c - 3d$ и получаем $x = 16c - 15d$. Продолжая таким же образом, получаем последовательность решений

$$c,\; 2c - d,\; 4c - 3d,\; 16c - 15d, \ldots . \tag{3}$$

Покажем, что все ее члены $x_n = 2^n c - (2^n - 1)d, \quad n = 0, 1, 2, \dots,$ попарно различны. Если допустить, что $x_n = x_m$ при $n \neq m$, то, преобразуя равенство, получим $(2^m - 2^n)c = (2^m - 2^n)d$, откуда $c = d$, это невозможно. Итак, множество X содержит бесконечное подмножество — последовательность (3), следовательно, множество X бесконечно.

Ответ: в точности все одноэлементные множества $X = \{a\},\ a \in (-\infty; \infty)$.

Задача 5.

Юный хакер желает изменить оценки в электронном журнале. Но при изменении одних оценок изменяются и другие, а именно: а) если он увеличивает на 2 количество пятерок, то при этом количество двоек уменьшается на 1; б) если он увеличивает на 1 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 2; в) если он уменьшает на 2 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 1; г) если он уменьшает на 1 количество пятерок, то количество двоек уменьшается на 2. Может ли он, совершая такие операции, превратить свои 3 пятерки и 30 двоек в 30 пятерок и 3 двойки?

Решение.

Обозначим через n_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ количество действий каждого из четырех возможных типов. Требуется решить систему (первое уравнение соответствует изменению количества пятерок, второе – двоек)

$$\begin{cases} 2n_1 + n_2 - 2n_3 - n_4 = 30 - 3 = 27, \\ -n_1 + 2n_2 + n_3 - 2n_4 = 3 - 30 = -27. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на два и сложим с первым.

$$5n_2 - 5n_4 = -27$$

или

$$5(n_2 - n_4) = -27.$$

Согласно условию, величина $m = n_2 - n_4$ является целым числом. Однако уравнение $5m = -27$ не имеет решения в целых числах.

Ответ. Не может.

Вариант 17101 для 10 класса

Задача 1.

Необходимо построить дорогу, вымощенную бетонными плитами. Она пройдет в местности, где есть прямолинейный участок линии электропередач (ЛЭП) и завод по производству плит, находящийся на расстоянии d от ЛЭП ($d \neq 0$). Для ритмичной работы требуется, чтобы каждая точка строящейся дороги была одинаково удалена от завода и от ЛЭП. Какой линией на плоскости описывается строящаяся дорога? Введите подходящую систему координат и найдите уравнение линии, описывающей дорогу, в этой системе координат; определите тип линии.

Решение.

Выберем прямоугольную систему координат XOY, завод бетонных плит поместим в начало O этой системы координат и направим ось OX вдоль ЛЭП. Пусть для определенности дорога проходит в полуплоскости $\{y \geq 0\}$. Тогда ЛЭП будет соответствовать прямая $y = d$.

Если $M(x, y)$ — точка строящейся дороги, то расстояние MO есть $\sqrt{x^2 + y^2}$, а расстояние между точкой M и ЛЭП равно $|y - d|$.

Приравняем квадраты этих расстояний:

$$x^2 + y^2 = |y - d|^2.$$

Отсюда получаем уравнение линии строящейся дороги:

$$y = \frac{d}{2} - \frac{1}{2d} \cdot x^2.$$

Это парабола.

Ответ: линия строящейся дороги есть парабола. Одно из возможных уравнений приведено выше.

Задача 2.

Найдите все значения вещественного параметра p, при которых разрешима система уравнений

$$\begin{cases} 2[x] & +y & = 3/2, \\ 3[x] & -2y & = p. \end{cases}$$

Здесь $[a]$ означает целую часть числа a.

Решение.

Решая систему относительно неизвестных $[x]$ и y, находим

$$[x] = \frac{p+3}{7}, \quad y = \frac{9}{14} - \frac{2p}{7}.$$

Остается выяснить, когда величина $\dfrac{p+3}{7}$ является целым числом.

Ответ. $p = 7k - 3$, $k \in \mathbb{Z}$.

Задача 3.

Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через Q проведена прямая, перпендикулярная PQ, которая повторно пересекает окружности в точках A и B, а касательные к окружностям в этих точках пересекаются в точке C. Докажите, что отрезки AQ и CB видны из точки P под одинаковыми углами.

Решение. Случай 1. Точки A и B по разные стороны от Q.

По теореме об угле между касательной и хордой $\angle BAC = \angle QPA$.

Поскольку на отрезок PC опираются два прямых угла $\angle PAC$ и $\angle PBC$, то четырехугольник $APBC$ вписанный (рис.1).

Значит, $\angle BPC = \angle BAC = \angle QPA$, ч.т.д.

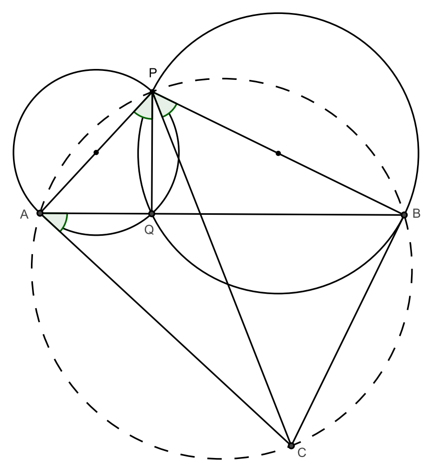


Рис.1.

Случай 2. Точки A и B по одну сторону от Q. Вновь применяя теорему об угле между касательной и хордой, получаем, что $\angle CAB = \angle APQ$ и $\angle CBQ = \pi - \angle QPB$. Следовательно, $\angle ACB = \angle APB$ и $\angle QPA = \angle BAC = \angle BPC$ (рис.2).

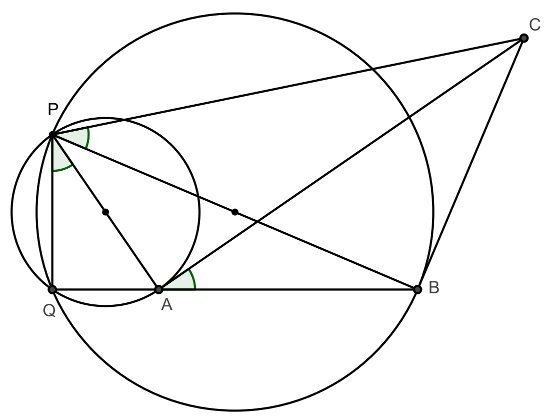


Рис.2.

Задача 4.

При проектировании некоторого технического устройства возникла необходимость решать уравнения

$$a \circ x = b,$$

где операция $\circ$ над двумя числами определена условием

$$y \circ z = \frac{y + z + |y - z|}{2}.$$

Найдите все числовые множества X такие, что для любых a, b из X указанное уравнение имеет единственный корень x и этот корень принадлежит множеству X.

Решение.

Заметим, что

$$y \circ z = \max\{y, z\}.$$

Далее, подходит любое одноэлементное множество

$$X = \{a\}, \quad a \in (-\infty; \infty)$$

так как $\max\{a, a\} = a$.

Допустим, что множество X содержит по крайней мере два различных элемента a и b. Не ограничивая общности, полагаем $a > b$. Для таких a и b уравнение (1) не имеет решения, так как $\max\{a, x\} \geq a$.

Ответ: в точности все одноэлементные множества $X = \{a\}$, $a \in (-\infty; \infty)$.

Задача 5.

Юный хакер желает изменить оценки в электронном журнале. Но при изменении одних оценок изменяются и другие, а именно: а) если он увеличивает на 2 количество пятерок, то при этом количество двоек уменьшается на 1; б) если он увеличивает на 1 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 2; в) если он уменьшает на 2 количество пятерок, то количество двоек увеличивается на 1; г) если он уменьшает на 1 количество пятерок, то количество двоек уменьшается на 2. Может ли он, совершая такие операции, превратить свои 3 пятерки и 30 двоек в 30 пятерок и 3 двойки?

Решение.

Обозначим через n_i $(i = 1, 2, 3, 4)$ количество действий каждого из четырех возможных типов. Требуется решить систему (первое уравнение соответствует изменению количества пятерок, второе – двоек)

$$\begin{cases} 2n_1 + n_2 - 2n_3 - n_4 = 30 - 3 = 27, \\ -n_1 + 2n_2 + n_3 - 2n_4 = 3 - 30 = -27. \end{cases}$$

Умножим второе уравнение на два и сложим с первым.

$$5n_2 - 5n_4 = -27$$

или

$$5(n_2 - n_4) = -27.$$

Согласно условию, величина $m = n_2 - n_4$ является целым числом. Однако уравнение $5m = -27$ не имеет решения в целых числах.

Ответ. Не может.

Вариант 17091 для 9 класса

Задача 1.

Если на педсовете Марья Ивановна сидит ВКонтакте, то Иван Ильич и Александра Варфоломеевна тоже сидят ВКонтакте. Этот факт директор знает давно. Также ему известно следующее. Только один из двух – Александра Варфоломеевна или Петр Петрович – сидит ВКонтакте. Хотя бы один из двух других – Ивана Ильича и Марьи Ивановны – сидит ВКонтакте. Также известно, что Петр Петрович и Иван Ильич либо оба сидят, либо оба не сидят ВКонтакте. Пользуясь только этими четырьмя верными утверждениями, директор без труда определяет, кто на педсовете сидит ВКонтакте. Сможете ли Вы? Не забудьте обосновать однозначность ответа.

Решение.

Будем использовать первые буквы имен для обозначения действующих лиц.

Первое условие допускает два варианта. Разберем их по очереди.

1. Пусть М сидит. Тогда И и А также сидят. Тогда из второго факта следует, что П не сидит. Получили противоречие с четвертым фактом, т.к. П и И не могут вести себя по-разному.

2. Убедимся, что второй вариант реализуем.

Итак, М не сидит (первый факт теперь ничего не дает). Но из третьего факта вытекает, что И сидит. Следовательно (четвертый факт), П также сидит. Наконец, второй факт дает, что А не сидит. Все утверждения проверены. Противоречий не возникло.

Ответ. ВКонтакте сидят Петр Петрович и Иван Ильич.

Задача 2.

Решите систему уравнений

$$\begin{cases} 2[x_1] & +x_2 & = 3/2, \\ 3[x_1] & -2x_2 & = 4. \end{cases}$$

Здесь $[a]$ означает целую часть числа a.

Решение.

Решая систему относительно неизвестных $[x_1]$ и x_2, находим

$$[x_1] = \frac{4+3}{7} = 1, \quad x_2 = \frac{9-16}{14} = -\frac{1}{2}.$$

Следовательно, x_1 может быть любым числом, целая часть которого равна 1.

Ответ: $x_1 \in [1;\ 2),\ x_2 = -1/2$.

Задача 3.

Две окружности пересекаются в точках P и Q. Через Q проведена прямая, перпендикулярная PQ, которая повторно пересекает окружности в точках A и B (причем точка Q лежит между A и B), а касательные к окружностям в этих точках пересекаются в точке C. Докажите, что отрезки AQ и CB видны из точки P под одинаковыми углами.

Решение. Случай 1. Точки A и B по разные стороны от Q.

По теореме об угле между касательной и хордой $\angle BAC = \angle QPA$.

Поскольку на отрезок PC опираются два прямых угла $\angle PAC$ и $\angle PBC$, то четырехугольник $APBC$ вписанный (рис.1).

Значит, $\angle BPC = \angle BAC = \angle QPA$, ч.т.д.

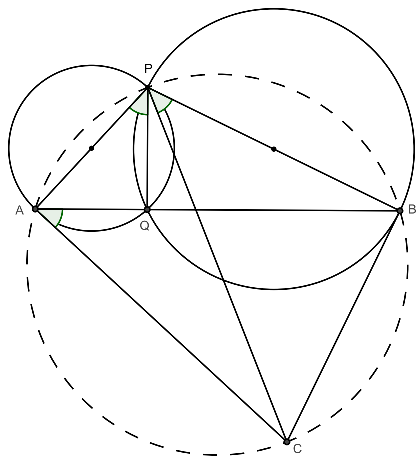


Рис.1.

Задача 4.

За два дня 100 банкиров собрали средства для борьбы с новым вирусом. Каждый из них внес однократно целое количество тысяч рублей, не превосходящее 200. При этом каждый взнос в первый день не превосходил 100 тысяч, а во второй был больше этой величины; и никакая пара из всех 100 взносов не отличалась ровно на 100 тысяч. Какую сумму собрали?

Решение существенно зависит от того, были ли все взносы различны или могли повторяться.

Пусть, сначала, все взносы различны. Любое натуральное число, большее 100, но не превосходящее 200, можно представить в виде $100 + n$, где $n \in [1, 2, 3, \ldots, 100]$. По условию нет двух чисел, отличающихся ровно на 100, а значит n принимает все оставшиеся от первых 50 чисел значения. Поэтому сумма всех 100 чисел равна $1 + 2 + 3 + \ldots + 100 + 100 \cdot 50 = 10050$.

Если взносы могли повторяться, то однозначного ответа дать невозможно, но можно произвести оценки. Заметим, что согласно условию в каждый день был хотя бы один взнос. Наименьшая сумма получится, если в первый день было 99 взносов по 1, а во второй день — один взнос 102 (101 быть не может). Суммарно получаем $99 \cdot 1 + 102 = 201$. Наибольшая сумма получится, если в первый день был 1 взнос, равный 99, а во второй день — 99 взносов по 200. Суммарно получаем $99 \cdot 200 + 99 = 19899$.

Ответ. Если все взносы различны, то собрали 10050 тысяч,
если нет, то минимально возможная сумма равна 201 тысяч, максимально возможная – 19899 тысяч.

Задача 5.

Необходимо построить дорогу, вымощенную бетонными плитами. Она пройдет в местности, где есть прямолинейный участок линии электропередач (ЛЭП) и завод по производству плит, находящийся на расстоянии d от ЛЭП ($d \neq 0$). Для ритмичной работы требуется, чтобы каждая точка строящейся дороги была одинаково удалена от завода и от ЛЭП.

А) Введите систему координат так, чтобы кирпичный завод имел координаты $(0,0)$, а ЛЭП проходила через точку $(0,d)$ параллельно одной из координатных осей, и найдите координаты точки на дороге, удаленной от завода на расстояние $5d$.

Б) Для каких натуральных n на такой дороге существует точка, удаленная от завода на расстояние nd?

Решение.

Пусть ЛЭП проходит параллельно координатной оси OX. Тогда ей будет соответствовать прямая $y = d$. Заметим, что строящаяся дорога будет находиться ниже этой прямой, (в полуплоскости $y \leq d$).

А) Если $M(x,y)$ — искомая точка строящейся дороги, то расстояние до завода MO есть $\sqrt{x^2+y^2}$. Это расстояние равно расстоянию между точкой M и ЛЭП, которое составляет $|y-d|$.

Согласно условию, $|y-d| = 5d$. Из двух решений полученного уравнения выбираем то, которое удовлетворяет условию $y \leq d$. Таким образом, $y = -4d$.

Осталось решить уравнение $\sqrt{x^2+(-4d)^2} = 5d$.

Оно имеет два решения $x = \pm 3d$.

Б) Для поиска указанной точки сначала необходимо решить уравнение

$$|y-d| = 5d$$

при дополнительном условии $y \leq d$. Такое решение всегда существует и равно $-(n-1)d$. Далее получаем уравнение $\sqrt{x^2+(n-1)^2d^2} = nd$, которое имеет решение $x = \pm\sqrt{2n-1}d$ при любом натуральном n.

Ответ. А) две точки $(-3d, -4d)$, $(3d, -4d)$. Б) для любых натуральных n.

Вариант 17081 для 8 класса

Задача 1.

Если на педсовете Марья Ивановна сидит ВКонтакте, то Иван Ильич и Александра Варфоломеевна тоже сидят ВКонтакте. Этот факт директор знает давно. Также ему известно следующее. Только один из двух – Александра Варфоломеевна или Петр Петрович – сидит ВКонтакте. Хотя бы один из двух других – Ивана Ильича и Марьи Ивановны – сидит ВКонтакте. Также известно, что Петр Петрович и Иван Ильич либо оба сидят, либо оба не сидят ВКонтакте. Пользуясь только этими четырьмя верными утверждениями, директор без труда определяет, кто на педсовете сидит ВКонтакте. Сможете ли Вы? Не забудьте обосновать однозначность ответа.

Решение.

Будем использовать первые буквы имен для обозначения действующих лиц.

Первое условие допускает два варианта. Разберем их по очереди.

1. Пусть М сидит. Тогда И и А также сидят. Тогда из второго факта следует, что П не сидит. Получили противоречие с четвертым фактом, т.к. П и И не могут вести себя по-разному.

2. Убедимся, что второй вариант реализуем.

Итак, М не сидит (первый факт теперь ничего не дает). Но из третьего факта вытекает, что И сидит. Следовательно (четвертый факт), П также сидит. Наконец, второй факт дает, что А не сидит. Все утверждения проверены. Противоречий не возникло.

Ответ. ВКонтакте сидят Петр Петрович и Иван Ильич.

Задача 2.

Какой цифрой оканчивается значение суммы $2019^{2020} + 2020^{2019}$?

Решение.

Число 2019^n для $n \in \mathbb{N}$ оканчивается на 9, если n – нечетно, и на 1, если n – четно. Тогда 2019^{2020} оканчивается 1. Число 2020^n оканчивается на 0 для любого $n \in \mathbb{N}$, поэтому 2020^{2019} оканчивается 0. Тогда сумма $2019^{2020} + 2020^{2019}$ оканчивается цифрой 1.

Ответ. Цифрой 1.

Задача 3.

На координатной плоскости выделен квадрат K с вершинами в точках $(0, 0)$ и $(10, 10)$. Изобразите внутри этого квадрата множество M точек (x, y), координаты которых удовлетворяют уравнению

$$[x] < [y],$$

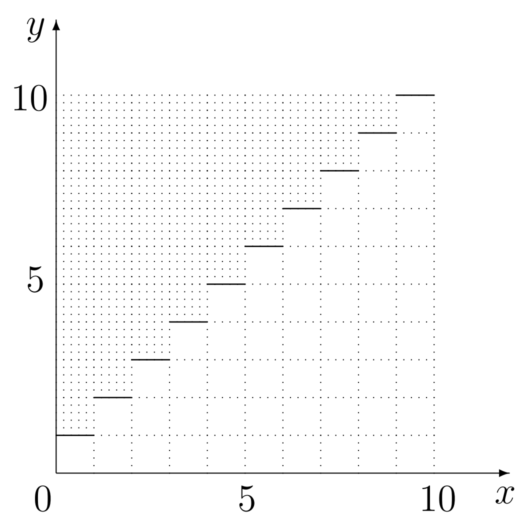
где $[a]$ обозначает целую часть числа a (то есть наибольшее целое число, не превосходящее a; например, $[10] = 10$, $[9,93] = 9$, $[1/9] = 0$, $[-1{,}7] = -2$). Какую часть площади квадрата K составляет площадь множества M?

Решение. Пусть $n \leq x < n+1$, где n – целое число от 0 до 9. Тогда $[x] = n$ и $n < [y]$. Решением последнего неравенства являются все $y \geq n+1$. Таким образом, решением будет являться объединение полос

$$\{n \leq x < n+1, n+1 \leq y, \quad n \in \mathbb{Z}\}.$$

Внутрь заданного в условии квадрата попадет часть девяти таких полос. Если разбить квадрат K на 100 единичных квадратиков, то искомое множество M будет состоять из $9+8+7+\ldots+1 = 45$ таких квадратиков. Следовательно, отношение площадей равно $\dfrac{S_M}{S_K} = \dfrac{45}{100}$.

Ответ представлен точечной штриховкой на рисунке ниже (горизонтальные участки границы включены в M, вертикальные — нет). Площадь множества M составляет 45% площади квадрата K.



Задача 4.

За два дня 50 финансистов собрали средства для борьбы с новым вирусом. Каждый из них внес однократно целое количество тысяч рублей, не превосходящее 100. При этом каждый взнос в первый день не превосходил 50 тысяч, а во второй был больше этой величины; и никакая пара из всех 50 взносов не отличалась ровно на 50 тысяч. Какую сумму собрали?

Решение существенно зависит от того, были ли все взносы различны или могли повторяться.

Пусть, сначала, все взносы различны. Любое натуральное число, большее 50, но не превосходящее 100, можно представить в виде $50 + n$, где $n \in [1, 2, 3, \ldots, 50]$. По условию нет двух чисел, отличающихся ровно на 50, а значит n принимает все оставшиеся от первых 25 чисел значения. Поэтому сумма всех 50 чисел равна $1 + 2 + 3 + \ldots + 50 + 50 \cdot 25 = 2525$.

Если взносы могли повторяться, то однозначного ответа дать невозможно, но можно произвести оценки. Заметим, что согласно условию в каждый день был хотя бы один взнос. Наименьшая сумма получится, если в первый день было 49 взносов по 1, а во второй день — один взнос 52 (51 быть не может). Суммарно получаем $49 \cdot 1 + 52 = 101$. Наибольшая сумма получится, если в первый день был 1 взнос, равный 49, а во второй день — 49 взносов по 100. Суммарно получаем $49 \cdot 100 + 49 = 4949$.

Ответ. Если все взносы различны, то собрали 2525 тысяч,
если нет, то минимально возможная сумма равна 101 тысяч, максимально возможная – 4949 тысяч.

Задача 5.

Необходимо построить дорогу, вымощенную желтым кирпичом. Она пройдет в местности, где есть прямолинейный участок линии электропередач (ЛЭП) и кирпичный завод, находящийся на расстоянии d от ЛЭП ($d \neq 0$). Для ритмичной работы требуется, чтобы каждая точка строящейся дороги была одинаково удалена от завода и от ЛЭП. Введите систему координат так, чтобы кирпичный завод имел координаты $(0, 0)$, а ЛЭП проходила через точку $(0, d)$ параллельно одной из координатных осей. Найдите координаты точки на дороге, удаленной от завода на расстояние $5d$.

Решение.

Пусть ЛЭП проходит параллельно координатной оси OX. Тогда ей будет соответствовать прямая $y = d$. Заметим, что строящаяся дорога будет находиться ниже этой прямой, (в полуплоскости $y \leq d$).

Если $M(x, y)$ — искомая точка строящейся дороги, то расстояние до завода MO есть $\sqrt{x^2 + y^2}$. Это расстояние равно расстоянию между точкой M и ЛЭП, которое составляет $|y - d|$.

Согласно условию, $|y - d| = 5d$. Из двух решений полученного уравнения выбираем то, которое удовлетворяет условию $y \leq d$. Таким образом, $y = -4d$.

Осталось решить уравнение $\sqrt{x^2 + (-4d)^2} = 5d$.

Оно имеет два решения $x = \pm 3d$.

Ответ. Две точки $(-3d, -4d)$, $(3d, -4d)$.

Вариант 17071 для 7 класса

Задача 1.

Если на педсовете Марья Ивановна сидит ВКонтакте, то Иван Ильич и Александра Варфоломеевна тоже сидят ВКонтакте. Этот факт директор знает давно. Также ему известно следующее. Только один из двух – Александра Варфоломеевна или Петр Петрович – сидит ВКонтакте. Хотя бы один из двух других – Ивана Ильича и Марьи Ивановны – сидит ВКонтакте. Также известно, что Петр Петрович и Иван Ильич либо оба сидят, либо оба не сидят ВКонтакте. Пользуясь только этими четырьмя верными утверждениями, директор без труда определяет, кто на педсовете сидит ВКонтакте. Сможете ли Вы? Не забудьте обосновать однозначность ответа.

Решение.

Будем использовать первые буквы имен для обозначения действующих лиц.

Первое условие допускает два варианта. Разберем их по очереди.

1. Пусть М сидит. Тогда И и А также сидят. Тогда из второго факта следует, что П не сидит. Получили противоречие с четвертым фактом, т.к. П и И не могут вести себя по-разному.

2. Убедимся, что второй вариант реализуем.

Итак, М не сидит (первый факт теперь ничего не дает). Но из третьего факта вытекает, что И сидит. Следовательно (четвертый факт), П также сидит. Наконец, второй факт дает, что А не сидит. Все утверждения проверены. Противоречий не возникло.

Ответ. ВКонтакте сидят Петр Петрович и Иван Ильич.

Задача 2.

Какой цифрой оканчивается значение суммы $2019^{2020} + 2020^{2019}$?

Решение.

Число 2019^n для $n \in \mathbb{N}$ оканчивается на 9, если n – нечетно, и на 1, если n – четно. Тогда 2019^{2020} оканчивается 1. Число 2020^n оканчивается на 0 для любого $n \in \mathbb{N}$, поэтому 2020^{2019} оканчивается 0. Тогда сумма $2019^{2020} + 2020^{2019}$ оканчивается цифрой 1.

Ответ. Цифрой 1.

Задача 3.

На координатной плоскости выделен квадрат K с вершинами в точках $(0,0)$ и $(10,10)$. Изобразите внутри этого квадрата множество M точек (x,y), координаты которых удовлетворяют уравнению

$$[x]=[y],$$

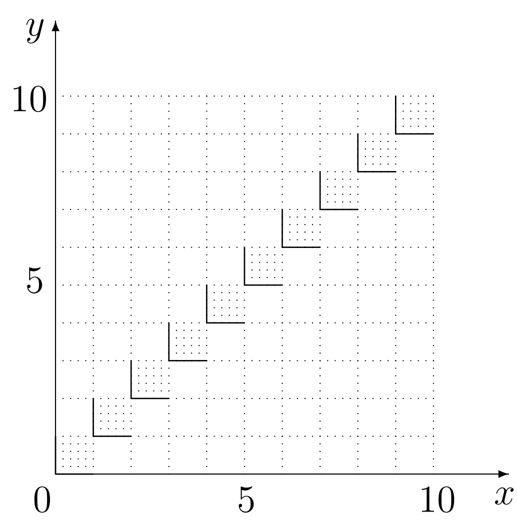
где $[a]$ обозначает целую часть числа a (то есть наибольшее целое число, не превосходящее a; например, $[10]=10$, $[9,93]=9$, $[1/9]=0$, $[-1{,}7]=-2$). Какую часть площади квадрата K составляет площадь множества M?

Решение. Пусть $n \le x < n+1$, где n – целое число от 0 до 9. Тогда $[x]=n$ и $[y]=n$. Решением последнего уравнения являются все $y \in [n, n+1)$. Таким образом, решением будет являться объединение единичных квадратиков

$$\{x \in [n, n+1), y \in [n, n+1), \quad n \in \mathbb{Z}\}.$$

Внутрь заданного в условии квадрата K попадет десять таких квадратиков. Поскольку K состоит из 100 единичных квадратиков, то отношение площадей равно $\dfrac{S_M}{S_K} = \dfrac{10}{100} = 0{,}1 = 10\%$.

Ответ представлен точечной штриховкой на рисунке ниже (левые и нижние границы включены в M, правые и верхние — нет). Площадь множества M составляет 10% площади квадрата K.



Задача 4.

В современных условиях считается актуальной *цифровизация* — перевод всей информации в цифровой код. Каждой букве алфавита можно поставить в соответствие неотрицательно целое число, называемое *кодом буквы*. Тогда можно определить *вес слова* как сумму кодов всех букв данного слова. Можно ли закодировать буквы Е, О, С, Т, Ш, Ь элементарными кодами, состоящими каждый из одной цифры от 0 до 9 так, чтобы вес слова «СТО» был бы не меньше веса слова «ШЕСТЬСОТ»? Если такое кодирование возможно, то сколькими способами его можно осуществить? Если такое кодирование возможно, то допускает ли оно однозначное восстановление слова по его коду?

Решение.

Обозначим через $k(x)$ элементарный код буквы x. Имеем

$$k(C)+k(T)+k(O) \geq k(\text{Ш})+k(\text{Е})+k(C)+k(T)+k(\text{Ь})+k(C)+k(O)+k(T),$$

что равносильно

$$k(\text{Ш})+k(\text{Е})+k(C)+k(T)+k(\text{Ь})=0.$$

Таким образом,

$$k(\text{Ш})=k(\text{Е})=k(C)=k(T)=k(\text{Ь})=0.$$

Элементарный код $k(O)$ может быть любой цифрой от 0 до 9. Следовательно, имеется ровно 10 способов такого кодирования.

Однако при любом выборе $k(O)$ слова "ТОСТ" и "ТОТ" (например) будут иметь одинаковые коды $k(O)$, которые не могут быть декодированы.

Ответ. Неравенство для весов выполняется тогда и только тогда, когда $k(\text{Ш})=k(\text{Е})=k(C)=k(T)=k(\text{Ь})=0$.

Имеется ровно 10 способов такого кодирования.

При любом из них однозначное декодирование невозможно.

Задача 5.

За 10 минут Женя съедает 5 ватрушек с творогом, а Саша – только 3. В субботу все испеченные ватрушки достались Жене, а в воскресенье – Саше. При этом всего было съедено 70 ватрушек ровно за три часа чистого времени. Сколько ватрушек с творогом досталось каждому из детей?

Решение.

Пусть Жене досталось n, а Саше — k ватрушек. Нужно решить в целых числах систему

$$\begin{cases} n+k=70, \\ 2n+\frac{10}{3}k=180. \end{cases}$$

Подставляя $n=70-k$ во второе уравнение, получаем

$$140-2k+\frac{10}{3}k=180$$

или
$$\frac{4}{3}\,k = 40.$$
Отсюда $k = 30$, $n = 70 - 30 = 40$.

Ответ. Жене досталось 40 ватрушек, Саше — 30.

Вариант 17061 для 6 класса

Задача 1.

Охотник Пулька для своей собаки Бульки получил с «АлиЭкспресс» два куля корма. Наутро один куль оказался пуст. Незнайка взялся за расследование и выявил троих подозреваемых, которые заявили следующее.

Сиропчик сказал, что он не ел собачий корм.

Торопыжка заявил, что корм съел либо Пончик, либо Сиропчик.

Пончик же подтвердил, что Сиропчик корм не ел.

Как выяснилось позже, невиновные сказали правду, а виновный солгал. Определите, кто же съел за ночь весь куль собачьего корма.

Решение.

Разберем по очереди три случая, в каждом из которых одно из утверждений ложно.

Случай 1. Врет Сиропчик.

В этом случае заявление Пончика также будет ложным, что противоречит условию.

Случай 2. Врет Торопыжка.

Это означает, что корм не ел ни Пончик, ни Сиропчик. Тогда они оба говорят правду, что соответствует условию.

Случай 3. Врет Пончик.

Тогда фраза Сиропчика также ложна, что противоречит условию.

Таким образом, только один из трех случаев (второй) не содержит противоречий. Следовательно, корм собачий съел Торопыжка.

Ответ. Весь куль собачьего корма съел Торопыжка.

Задача 2.

Какой цифрой оканчивается значение суммы $6^{2020} + 2019^{2020}$?

Решение.

Число 6 в любой степени оканчивается на 6.

Степень числа 9 оканчивается на 9, если эта степень нечетна, и на 1, если эта степень четна. Тогда 2019^{2020} оканчивается на 1.

Следовательно, сумма $6^{2020} + 2019^{2020}$ оканчивается цифрой 7.

Ответ. Цифрой 7.

Задача 3.

Квадратный лист бумаги сложили пополам, затем еще раз пополам и в третий раз пополам. В результате получился треугольник (см. рис. 1, на котором все линии сгибов проходят по пунктирным линиям). После этого сделали разрез по линии PQ и развернули лист. Будет ли отличаться форма получившейся фигуры от того, как был произведен первый сгиб: по линии MN или по линии AB? Обоснуйте свой ответ и нарисуйте получившуюся фигуру (одну или две).

Решение.

Достаточно нарисовать два способа развертывания (свертывания) и убедиться, что различий не будет. Результат развертывания представлен справа (рис. 2).

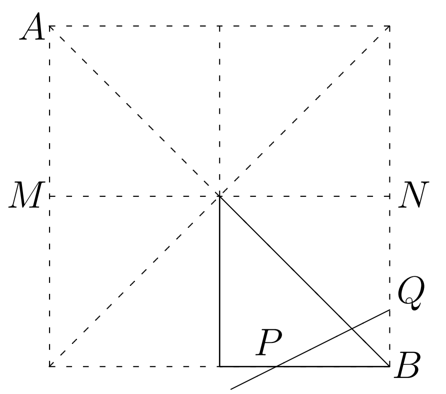


Рис. 1

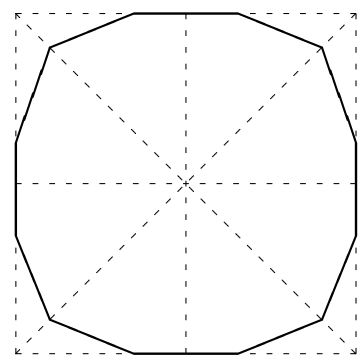


Рис. 2

Ответ. Различий не будет.

Задача 4.

В современных условиях считается актуальной *цифровизация* — перевод всей информации в цифровой код. Каждой букве алфавита можно поставить в соответствие неотрицательно целое число, называемое *кодом буквы*. Тогда можно определить *вес слова* как сумму кодов всех букв данного слова. Можно ли закодировать буквы О, П, С, Т, Ь, Я элементарными кодами, состоящими каждый из одной цифры от 0 до 9 так, чтобы вес слова «СТО» был бы не меньше веса слова «ПЯТЬСОТ»? Если такое кодирование возможно, то сколькими способами его можно осуществить? Если такое кодирование возможно, то допускает ли оно однозначное восстановление слова по его коду?

Решение.

Обозначим через $k(x)$ элементарный код буквы x. Имеем:

$$k(C) + k(T) + k(O) \geq k(\text{П}) + k(\text{Я}) + k(T) + k(\text{Ь}) + k(C) + k(O) + k(T)$$

что равносильно

$$k(\text{П}) + k(T) + k(\text{Ь}) + k(\text{Я}) = 0,$$

откуда

$$k(\text{П}) = k(T) = k(\text{Ь}) = k(\text{Я}) = 0.$$

Элементарные коды двух оставшихся букв $k(C)$ и $k(O)$ могут быть любыми цифрами от 0 до 9. Следовательно, имеется ровно 10^2 способов такого кодирования. Однако при любом выборе $k(O)$ и $k(C)$ слова "ПОП" и "ТОТ" будут иметь одинаковые коды $k(O)$, которые не могут быть декодированы.

Ответ. Неравенство для весов выполняется тогда и только тогда, когда $k(\text{П}) = k(T) = k(\text{Ь}) = k(\text{Я}) = 0$.

Имеется ровно 100 способов такого кодирования.

При любом из них однозначное декодирование невозможно.

Задача 5.

За 10 минут Женя съедает 5 ватрушек с творогом, а Саша – только 3. В субботу все испеченные ватрушки достались Жене, а в воскресенье – Саше. При этом всего было съедено 35 ватрушек за полтора часа чистого времени. Сколько ватрушек с творогом досталось каждому из детей?

Решение.

Задача может быть решеная составлением системы уравнений с двумя неизвестными (как аналогичная задача для 7 класса). Однако вряд ли учащиеся 6 класса пойдут по такому пути.

Альтернативный способ рассуждений может быть, например, таков.

Полтора часа — это 9 раз по 10 минут. Допустим, что дети ели десятиминутками. Пусть Саша потратил(а) x таких десятиминуток. Тогда Сашей съедено $3x$ ватрушек.

Следовательно, Женей съедено $35 - 3x$ ватрушек. Если каждый из детей потратил целое число десятиминуток, то величина $35 - 3x$ должна делиться на 5, откуда $3x$ должно делиться на 5.

Поскольку $x \leq 9$, то единственно возможный вариант $x = 5$. Таким образом, Сашей съедено $5 \cdot 3 = 15$ ватрушек, а Женей $35 - 15 = 20$.

Ответ. Жене досталось 20 ватрушек, Саше — 15.

Вариант 17051 для 5 класса

Задача 1.

Охотник Пулька для своей собаки Бульки получил с «АлиЭкспресс» два куля корма. Наутро один куль оказался пуст. Незнайка взялся за расследование и выявил троих подозреваемых, которые заявили следующее.

Сиропчик сказал, что он не ел собачий корм.

Торопыжка заявил, что корм съел либо Пончик, либо Сиропчик.

Пончик же подтвердил, что Сиропчик корм не ел.

Как выяснилось позже, невиновные сказали правду, а виновный солгал. Определите, кто же съел за ночь весь куль собачьего корма.

Решение.

Разберем по очереди три случая, в каждом из которых одно из утверждений ложно.

Случай 1. Врет Сиропчик.

В этом случае заявление Пончика также будет ложным, что противоречит условию.

Случай 2. Врет Торопыжка.

Это означает, что корм не ел ни Пончик, ни Сиропчик. Тогда они оба говорят правду, что соответствует условию.

Случай 3. Врет Пончик.

Тогда фраза Сиропчика также ложна, что противоречит условию.

Таким образом, только один из трех случаев (второй) не содержит противоречий. Следовательно, корм собачий съел Торопыжка.

Ответ. Весь куль собачьего корма съел Торопыжка.

Задача 2.

Какой цифрой оканчивается значение суммы $5^{2020} + 6^{2019}$?

Решение.

Число 5 в любой степени оканчивается на 5.

Число 6 в любой степени оканчивается на 6.

Следовательно, сумма $5^{2020} + 6^{2019}$ оканчивается цифрой 1.

Ответ. Цифрой 1.

Задача 3.

Квадратный лист бумаги сложили пополам, затем еще раз пополам и в третий раз пополам. В результате получился треугольник (см. рис. 1, на котором все линии сгибов проходят по пунктирным линиям). После этого сделали разрез по линии PQ и развернули лист. Будет ли отличаться форма получившейся фигуры от того, как был произведен первый сгиб: по линии MN или по линии AB? обоснуйте свой ответ и нарисуйте получившуюся фигуру (одну или две).

Решение.

Достаточно нарисовать два способа развертывания (свертывания) и убедиться, что различий не будет. Результат развертывания представлен справа (рис. 2).

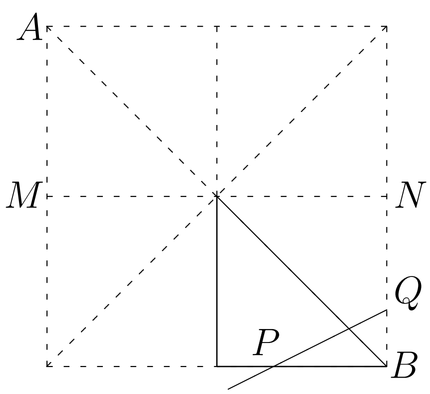


Рис. 1

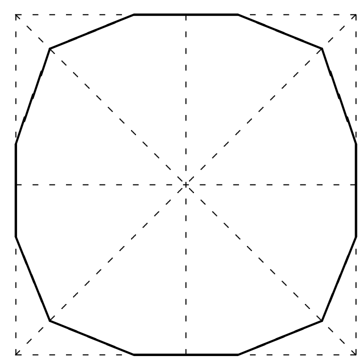


Рис. 2

Ответ. Различий не будет.

Задача 4.

В современных условиях считается актуальной *цифровизация* — перевод всей информации в цифровой код. Каждой букве алфавита можно поставить в соответствие неотрицательно целое число, называемое *кодом буквы*. Тогда можно определить *вес слова* как сумму кодов всех букв данного слова. Можно ли закодировать буквы О, П, С, Т, Ь, Я элементарными кодами, состоящими каждый из одной цифры от 0 до 9 так, чтобы вес слова «СТО» был бы не меньше веса слова «ПЯТЬСОТ»? Если такое кодирование возможно, то допускает ли оно однозначное восстановление слова по его коду?

Решение.

Обозначим через $k(x)$ элементарный код буквы x. Имеем:

$$k(C) + k(T) + k(O) \geq k(\text{П}) + k(\text{Я}) + k(T) + k(\text{Ь}) + k(C) + k(O) + k(T)$$

что равносильно

$$k(\text{П}) + k(T) + k(\text{Ь}) + k(\text{Я}) = 0,$$

откуда

$$k(\text{П}) = k(T) = k(\text{Ь}) = k(\text{Я}) = 0.$$

Элементарные коды двух оставшихся букв $k(C)$ и $k(O)$ могут быть любыми цифрами от 0 до 9. Следовательно, имеется ровно 10^2 способов такого кодирования. Однако при любом выборе $k(O)$ и $k(C)$ слова "ПОП" и "ТОТ" будут иметь одинаковые коды $k(O)$, которые не могут быть декодированы.

Ответ. Неравенство для весов выполняется тогда и только тогда, когда $k(\text{П}) = k(T) = k(\text{Ь}) = k(\text{Я}) = 0$.

Имеется ровно 100 способов такого кодирования.

При любом из них однозначное декодирование невозможно.

Задача 5.

Вагоны скорого поезда «Москва – Ялта» должны быть пронумерованы подряд, начиная с единицы. Но в спешке два соседних вагона получили одинаковые номера. При этом оказалось, что сумма номеров всех вагонов равна 111. Сколько вагонов в составе и какой номер использован дважды?

Решение.

Начнем последовательно вычислять суммы

$$\begin{aligned} 1 + 2 &= 3, \\ 1 + 2 + 3 &= 6, \\ &\dots \\ 1 + 2 + \ldots + 14 &= 105, \\ 1 + 2 + \ldots + 14 + 15 &= 120. \end{aligned}$$

Отсюда ясно, что 14 вагонов имели первые 14 порядковых номеров, которые в сумме дают 105, и еще один вагон имел номер, равный $111 - 105 = 6$.

Ответ. В составе было 15 вагонов, два из них имели номер 6.