Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Заключительный этап

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ

Вариант 17101 для 10 класса

1. На координатной плоскости каждая из N прямых l_j параллельна прямой $y = x + 2021$ и пересекает кривую $y = 1/x$ ровно в двух точках $(x_1(j), y_1(j))$ и $(x_2(j), y_2(j))$ $(j = 1, 2, \dots, N)$. Рассмотрим два произведения

$$P_1 = y_1(1)y_1(2)\cdots y_1(N) \quad \text{и} \quad P_2 = y_2(1)y_2(2)\cdots y_2(N).$$

Решите уравнение $\operatorname{tg} z = P_1P_2$ и выясните, как это решение зависит от N.

Ответ. если N четно, то $z = \pi/4 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$;
если N нечетно, то $z = -\pi/4 + \pi k,\ k \in \mathbb{Z}$.

2. Выясните, может ли уравнение $x^2 + px + q = 0$ иметь целые корни, если p и q целые нечетные.

Ответ. Не могут.

3. На сторонах AB и AD квадрата $ABCD$ отмечены две точки, соответственно, X и Y так, что периметр треугольника AXY равен удвоенной стороне квадрата. Найдите сумму косинуса и синуса угла XCY.

Ответ. $\sqrt{2}$

4. Найдите наименьшее значение функции $f(x, y) = x^2 + y^2$, если переменные удовлетворяют неравенствам

$$|2x + y| \leq b, \quad |2x - y| \geq b$$

(где b – фиксированное вещественное число).

Ответ. Если $b < 0$, то ф-я f не определена. Если $b \geq 0$, то

$$f_{min} = \frac{b^2}{a^2 + 1}.$$

5. При решении некоторой задачи с натуральным параметром n получена дробь

$$\frac{101n + 25}{57n + 14}.$$

При каких n дробь можно сократить?

Ответ. $n = 4 + 11k$, где k — целое неотрицательное.