Олимпиада школьников «Надежда энергетики». Отборочный этап. Заочная форма.

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ
ВАРИАНТ 11994 для 9 класса

1. Обозначим через x_1, x_2, x_3 корни многочлена $P(x) = x^3 - 4x^2 + 5x - 10$. Найдите значение выражения $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2)^{-1} \cdot \left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \frac{1}{x_3}\right)^2$.

2. Трудясь непрерывно, Пончик и Сиропчик в течение суток съели месячный запас вкусняшек, при этом их прожорливость ночью составляла 75% от их прожорливости днем. Выясните, во сколько раз должна измениться длительность ночи, чтобы съесть тот же запас за то же время, если их ночная прожорливость понизится на 20% (при неизменной дневной)?

3. Целой частью $[x]$ числа x называется наибольшее целое m такое, что $m \leq x$. Например, $[-4/3] = -2$, $[\pi] = 3$, $[2] = 2$. Решите в целых числах уравнение

$$\left[\frac{x}{3}\right] + \left[\frac{x-1}{3}\right] = x - 1.$$

4. Нарисуйте (и обоснуйте) множество всех точек на декартовой плоскости XOY, координаты которых удовлетворяют неравенствам

$$\begin{cases} x^2 \leq 1, \\ |y| \leq \sqrt{1 - x^2}, \\ |x| + y \leq 1. \end{cases}$$

5. Коротая время перед рассветом, суперагенты Хвоин и Умкин играют в такую игру: Хвоин выбирает произвольное целое число x_1, Умкин увеличивает или уменьшает его на 3, получая число y_1. Затем каждый вычисляет следующее число по формулам:

$$\begin{cases} x_{n+1} = 4x_n + 7y_n + n - n^2, \\ y_{n+1} = 7x_n + 4y_n + n - n^2 - 3, \quad n = 1, 2, ... \end{cases}$$

Могут ли агенты на каком-то шаге $n > 1$ получить равные числа?