Материалы заданий заключительного этапа
Олимпиады школьников «Надежда энергетики» по математике
в 2011/2012 учебном году

Характер и уровень сложности олимпиадных задач направлены на достижение целей проведения олимпиады: выявить способных участников, твердо владеющих школьной программой и наиболее подготовленных к усвоению образовательных программ технических ВУЗов, обладающих логикой и творческим характером мышления, умеющих математически "смоделировать" реальные ситуации из различных предметных областей и применить к ним наиболее подходящие математические методы.

Задания олимпиады дифференцированы по сложности и требуют различных временных затрат на полное и безупречное решение. Они охватывают все разделы школьной программы, но носят, в большинстве, комплексный характер, позволяющий варьировать оценки в зависимости от проявленных в решении творческих подходов и продемонстрированных технических навыков. Участники должны самостоятельно определить разделы и теоретические факты программы, применимые в каждой задаче, разбить задачу на подзадачи, грамотно выполнить решение каждой подзадачи, синтезировать решение всей задачи из решений отдельных подзадач.

Успешное выполнение олимпиадной работы не требует знаний, выходящих за пределы школьной программы, но, как видно из результатов олимпиады, доступно не каждому школьнику, поскольку требует творческого подхода, логического мышления, умения увидеть и составить правильный и оптимальный план решения, четкого и технически грамотного выполнения каждой части решения, отбора допустимых решений из возможного их множества.

Умение справляться с такими заданиями приходит к участникам с опытом, который вырабатывается на отборочном этапе Олимпиады.

Вариант для 10-х и 11-х классов

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «НАДЕЖДА ЭНЕРГЕТИКИ»

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ВАРИАНТ 6011	ПРЕДСЕДАТЕЛЬ ОРГКОМИТЕТА ОЛИМПИАДЫ

1. На строительство теплоцентрали завезли трубы двух диаметров. Узких труб меньше, чем широких. Если число узких труб увеличить вдвое, то общее количество труб окажется больше 597. Если удвоить число широких, а число узких труб оставить первоначальным, то общее количество труб будет меньше 600. Сколько завезли узких и сколько широких труб? Как изменится ответ, если вместо 597 и 600 будут числа 6 и 9?

2. Гидроцикл, двигаясь против течения реки, повстречал надувной плот, продолжил без остановки движение и через 5 минут развернулся без снижения скорости. Двигаясь по течению, он догнал плот на расстоянии 500 м от места первой встречи. Скорость гидроцикла постоянна, люди на плоту заняты рыбалкой и никак не влияют на движение плавсредства. Какова скорость течения реки?

3. Крепостная стена имеет форму замкнутой непересекающейся ломаной линии с прямыми углами между каждыми двумя соседними отрезками. Темной ночью около этой стены опустился парашютист. Как ему узнать, находится ли он внутри крепости?

4. В Цветочном городе цены на все товары выражаются целым числом фантиков. Незнайка решил провести денежную реформу: все прежние деньги отменить, а ввести лишь две новые монеты достоинством 5 и 6 фантиков. Можно ли, пользуясь этими монетами, набрать сумму для покупки без сдачи такой же как у Незнайки шляпы ценой 31 фантик и воздушного шара ценой 654321 фантик? Ознакомившись с предложением Незнайки, Знайка, немного подумав, понял, что придется изменить некоторые цены. Какие?

5. Можно ли расположить по окружности в некотором порядке числа 0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9 (среди них нет 3 и 4) так, чтобы каждое число присутствовало на окружности ровно один раз, а абсолютная величина разности между любыми двумя соседними числами была равна 3, 4 или 5?

6. У ученика Пети Безручкина на калькуляторе работают кнопки сложения и вычитания, кнопки остальных арифметических операций неисправны. Можно ли, пользуясь таким калькулятором, выяснить, является ли произвольное натуральное число N точным квадратом и, если это так, вычислить квадратный корень из N? Сколько раз при этом придется нажимать клавиши сложения и вычитания? (Дайте как можно более точную оценку суммарного числа нажатий обеих клавиш).

Вариант для 10-х и 11-х классов

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «НАДЕЖДА ЭНЕРГЕТИКИ»

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ВАРИАНТ 7011	ПРЕДСЕДАТЕЛЬ ОРГКОМИТЕТА ОЛИМПИАДЫ

1. На электростанции залы, занимаемые турбинами, имеют вид квадратов, длина стороны каждого квадрата – целое число метров. Потолки трех залов решили отремонтировать, покрыв их специальной краской по цене 1000 рублей за 1 м^2 покрытия. Кассир ремонтного предприятия Катя, принимая плату, заметила, что все банкноты оказались достоинством 5000 рублей, сдача не потребовалась. Катя хорошо умеет считать и быстро поняла, что по крайней мере один из квадратных залов имеет длину стороны, кратную 5 метрам. Почему Катя сделала такой вывод? Если бы существовали банкноты по 6000 рублей и ими была собрана сумма за ремонт 2011 или 2012 квадратных залов с целыми размерами, то остался бы верен вывод Кати?

2. Крепостная стена имеет форму замкнутой непересекающейся ломаной линии с прямыми углами между каждыми двумя соседними отрезками. Темной ночью около этой стены опустился парашютист. Как ему узнать, находится ли он внутри крепости?

3. Можно ли расположить по окружности в некотором порядке числа 1, 2, 3, 6, 7, 8, 9, 10 (среди них нет 4 и 5) так, чтобы каждое число присутствовало на окружности ровно один раз и абсолютная величина разности между любыми двумя соседними числами была равна 3, 4 или 5?

4. Гидроцикл, двигаясь против течения реки, повстречал надувной плот, продолжил без остановки движение и через 5 минут развернулся без снижения скорости. Двигаясь по течению, он догнал плот на расстоянии 500 м от места первой встречи. Скорость гидроцикла постоянна, люди на плоту заняты рыбалкой и никак не влияют на движение плавсредства. Какова скорость течения реки?

5. Математик А, находясь на отдыхе, предложил математику В следующую игру: «Найдите какое-либо решение квадратного уравнения с тремя неизвестными $x^2+y^2+z^2=xy+xz+yz$. Если Вы этого сделать не сможете, то заплатите мне 1000 рублей. Если я, зная Ваше решение (x_1,y_1,z_1), смогу найти другое решение (x_2,y_2,z_2) такое, что $x_2+y_2+z_2-(x_1+y_1+z_1)=\Delta>0$, то Вы заплатите мне N рублей, где N – целая часть числа Δ. Если я этого сделать не смогу, я заплачу Вам 100M рублей, где M – целая часть числа $|x_1|+|y_1|+|z_1|+1000$.» Математик В, подумав, отказался играть, поняв,что он всегда окажется в проигрыше.

1) Почему В сделал такой вывод?

2) Как можно изменить уравнение, чтобы оно оставалось квадратным с тремя неизвестными, но при тех же условиях игры математик В выиграл?

6. У ученика Пети Безручкина на калькуляторе работают кнопки сложения и вычитания, кнопки остальных арифметических операций неисправны. Можно ли, пользуясь таким калькулятором, выяснить, является ли произвольное натуральное число N точным квадратом и, если это так, вычислить квадратный корень из N? Сколько раз при этом придется нажимать клавиши сложения и вычитания? (Дайте как можно более точную оценку суммарного числа нажатий обеих клавиш).

Вариант для 9-го класса

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «НАДЕЖДА ЭНЕРГЕТИКИ»

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ВАРИАНТ Z991	ПРЕДСЕДАТЕЛЬ ОРГКОМИТЕТА ОЛИМПИАДЫ

1. На строительство теплоцентрали завезли трубы двух диаметров. Узких труб больше, чем широких. Если число узких труб увеличить вдвое, то общее количество труб окажется меньше 1203. Если удвоить число широких труб, а число узких оставить первоначальным, то всего труб будет больше 1200. Сколько завезли узких и сколько широких труб? Как изменится ответ, если вместо 1203 и 1200 будут числа 9 и 6?
2. Можно ли расположить по окружности в некотором порядке числа 0, 1, 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11 (среди них нет 4 и 9) так, чтобы каждое число присутствовало на окружности ровно один раз, а абсолютная величина разности между любыми двумя соседними числами была равна 4, 5 или 6?
3. Крепостная стена имеет форму замкнутой непересекающейся ломаной линии с прямыми углами между каждыми двумя соседними отрезками. Темной ночью около этой стены опустился парашютист. Как ему узнать, находится ли он внутри крепости?
4. Гидроцикл, двигаясь по течению реки, обогнал надувной плот, продолжил движение и через 4 минуты развернулся без снижения скорости. Двигаясь против течения реки, он встретил плот на расстоянии 400 м от места их первой встречи. Скорость гидроцикла постоянна, люди на плоту заняты рыбалкой и никак не влияют на движение плавсредства. Какова скорость течения реки?
5. В Цветочном городе цены на все товары выражаются целым числом фантиков. Незнайка решил провести денежную реформу: все прежние деньги отменить, а ввести лишь две новые монеты достоинством 6 и 7 фантиков. Можно ли, пользуясь этими монетами, набрать сумму для покупки без сдачи такой же как у Незнайки шляпы ценой 43 фантика и воздушного шара ценой 1 000 000 фантиков? Ознакомившись с предложением Незнайки, Знайка, немного подумав, понял, что придется изменить некоторые цены. Какие?

ОЛИМПИАДА ШКОЛЬНИКОВ «НАДЕЖДА ЭНЕРГЕТИКИ»

ЗАДАНИЕ ПО МАТЕМАТИКЕ ВАРИАНТ Z781	ПРЕДСЕДАТЕЛЬ ОРГКОМИТЕТА ОЛИМПИАДЫ

1. Можно ли расположить по окружности в некотором порядке числа 0, 1, 2, 5, 6, 7, 8, 9 (среди них нет 3 и 4) так, чтобы каждое число присутствовало на окружности ровно один раз, а абсолютная величина разности между любыми двумя соседними числами была равна 3, 4 или 5?
2. Крепостная стена имеет форму замкнутой непересекающейся ломаной линии с прямыми углами между каждыми двумя соседними отрезками. Темной ночью около этой стены опустился парашютист. Как ему узнать, находится ли он внутри крепости?
3. Гидроцикл, двигаясь против течения реки, повстречал надувной плот, продолжил без остановки движение и через 5 минут развернулся без снижения скорости. Двигаясь по течению, он догнал плот на расстоянии 500 м от места первой встречи. Скорость гидроцикла постоянна, люди на плоту заняты рыбалкой и никак не влияют на движение плавсредства. Какова скорость течения реки?
4. В Цветочном городе цены на все товары выражаются целым числом фантиков. Незнайка решил провести денежную реформу: все прежние деньги отменить, а ввести лишь две новые монеты достоинством 5 и 6 фантиков. Можно ли, пользуясь этими монетами, набрать сумму для покупки без сдачи такой же как у Незнайки шляпы ценой 31 фантик и воздушного шара ценой 654321 фантик? Ознакомившись с предложением Незнайки, Знайка, немного подумав, понял, что придется изменить некоторые цены. Какие?
5. Жене и Саше нужно вырезать из бумаги «инопланетянина» в форме равнобедренного треугольника с основанием a и высотой h ($h > a/2$), затратив как можно меньше бумаги. Женя берет для этого бумажный прямоугольник, одна из сторон которого совпадает с основанием треугольника, третья вершина «инопланетянина» лежит на противоположной стороне прямоугольника. Саша берет бумажный прямоугольник, одна из сторон которого совпадает с боковой стороной треугольника, а третья вершина «инопланетянина» также расположена на противоположной стороне прямоугольника. Лишние части прямоугольного листа отрезаются. Кому потребуется бумажный прямоугольный лист меньшей площади?

Ответы к задачам вариантов заключительного этапа Олимпиады

Задача 6011.1 (о трубах)

На строительство теплоцентрали завезли трубы двух диаметров. Узких труб меньше, чем широких. Если число узких труб увеличить вдвое, то общее количество труб окажется больше 597. Если удвоить число широких, а число узких труб оставить первоначальным, то общее количество труб будет меньше 600. Сколько завезли узких и сколько широких труб? Как изменится ответ, если вместо 597 и 600 будут числа 6 и 9?

Решение.

Пусть x – количество узких, y – количество широких труб, n=199. Тогда числа x и y --- неотрицательные целые. Имеем систему неравенств:

$$\begin{cases} x < y \\ 2x + y > 3n \\ x + 2y < 3n + 3 \end{cases}$$

Преобразуя эти неравенства, получаем:

$$\begin{cases} n - 3 < x < n + 1 \\ n < y < 3 + x \end{cases}$$

Полученной системе удовлетворяют три пары чисел:

$$\begin{cases} x = n \\ y = n + 1 \end{cases} \quad \begin{cases} x = n \\ y = n + 2 \end{cases} \quad \begin{cases} x = n - 1 \\ y = n + 1 \end{cases}$$

Непосредственной проверкой убеждаемся, что условию задачи удовлетворяет одна из этих пар: $x = n, \quad y = n + 1$.

Таким образом, было n=199 узких и $n+1$=200 широких труб. Это ответ на большой вопрос.

Малый вопрос – при замене 597 и 600 на 6 и 9. В этом случае можно избежать сложных преобразований неравенств и свести решение к очень ограниченному перебору. По-прежнему, x и y – натуральные, n=2, условия задачи описываются неравенствами $1 \le x < y \le 3$, 2x+y>6, x+2y<9. При этом остаются только три возможности: (x, y)=(1, 2), (1, 3), (2,3). Всем условиям удовлетворяет лишь последняя пара.

Ответ на малый вопрос: 2 узкие и 3 широкие трубы.

Задача 6011.2 (о гидроцикле).

Решение.

Для наблюдателя на плоту гидроцикл (с собственной скоростью V) за интервал времени между двумя встречами дважды прошел отрезок S (со скоростями $V + V_{\text{ТЕЧ}}$ и $V - V_{\text{ТЕЧ}}$), т.е. находился в движении 2t минут (где t - время до разворота). За это время плот прошел расстояние S со скоростью $V_{\text{ТЕЧ}}$.

Таким образом, $V_{\text{ТЕЧ}} = \dfrac{S}{2t} = \dfrac{500\,\text{м}}{10\,\text{мин}} = 3\,\text{км/ч}$. В другом варианте решение аналогично, ответ тот же, 3 км/ч.

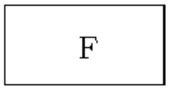
Задача 6011.3 (о крепости).

Ответ.

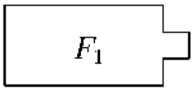
Надо оставить парашют или другой предмет на месте (у стены) и обходить стену, держась за нее одной (напр., левой) рукой. Тогда изнутри правых поворотов будет на 4 больше, чем левых, снаружи – левых будет на 4 больше, чем правых.

Если держаться правой рукой – наоборот.

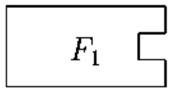
Решение.
Доказать это можно по индукции.
Базис: прямоугольник (фигура F)



Индуктивный переход: переход от фигуры F к фигуре F_1, полученной из F присоединением прямоугольника или выемкой его.



или



Задача 6011.4 (о Незнайке).
В Цветочном городе цены на все товары выражаются целым числом фантиков. Незнайка решил провести денежную реформу: все прежние деньги отменить, а ввести лишь две новые монеты достоинством 5 и 6 фантиков. Можно ли, пользуясь этими монетами, набрать сумму для покупки без сдачи такой же как у Незнайки шляпы ценой 31 фантик и воздушного шара ценой 654321 фантик? Ознакомившись с предложением Незнайки, Знайка, немного подумав, понял, что придется изменить некоторые цены. Какие?
Ответ (6011.4).
31 и 654321 можно. Нельзя 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 19.
Решение (6011.4).
1. Монетами по 5 и 6 фантиков можно составить любую сумму n, кратную 5 или 6, следовательно и 30.
2. Пусть n-целое, $n > 30$ и n не делится на 5. Тогда $n = 5q + r$, где $r = 1, 2, 3, 4$, q- целое , $q \geq 6$.
Тогда $n = 5q + r = 5(q - r) + 6r$. Значит, любую сумму $n \geq 30$ можно составить монетами в 5 и 6 фантиков.
3. Осталось проверить все числа n: $1 \leq n \leq 29$. Для этого составим таблицу, в которой $x_1 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $x_2 = 0, 1, 2, 3, 4$, $1 \leq 5x_1 + 6x_2 \leq 29$.

x_1	x_2	$5x_1 + 6x_2$
0	1	6
0	2	12
0	3	18
0	4	24
1	0	5
1	1	11
1	2	17
1	3	23
1	4	29
2	0	10
2	1	16
2	2	22
2	3	28
3	0	15
3	1	21
3	2	27
4	0	20
4	1	26
5	0	25

Для наглядности изобразим набираемые монетами суммы другой таблицей

1	2	3	4	~~5~~
~~6~~	7	8	9	~~10~~
~~11~~	~~12~~	13	14	~~15~~
~~16~~	~~17~~	~~18~~	19	~~20~~
~~21~~	~~22~~	~~23~~	~~24~~	~~25~~
~~26~~	~~27~~	~~28~~	~~29~~	~~30~~

Остается 11 цен, которых больше не должно быть: 1, 2, 3, 4, 7, 8, 9, 13, 14, 19.

Задача 6991.4 (о Незнайке).

В Цветочном городе цены на все товары выражаются целым числом фантиков. Незнайка решил провести денежную реформу: все прежние деньги отменить, а ввести лишь две новые монеты достоинством 6 и 7 фантиков. Можно ли, пользуясь этими монетами, набрать сумму для покупки без сдачи такой же как у Незнайки шляпы ценой 43 фантика и воздушного шара ценой 1 000 000 фантиков? Ознакомившись с предложением Незнайки, Знайка, немного подумав, понял, что придется изменить некоторые цены. Какие?

Ответ (6991.4).

43 и 1 000 000 можно. Нельзя 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 22, 23, 29.

Решение (6991.4).

1. Монетами по 6 и 7 фантиков можно составить любую сумму n, кратную 6 или 7, следовательно и 42.

2. Пусть n-целое, $n > 42$ и n не делится на 6. Тогда $n = 6q + r$, где $r = 1, 2, 3, 4, 5$, q-целое, $q \geq 7$. Тогда $n = 6q + r = 6(q - r) + 7r$. Значит, любую сумму $n \geq 42$ можно составить монетами в 6 и 7 фантиков.

3. Осталось проверить все числа n: $1 \leq n \leq 41$. Для этого составим таблицу, в которой $x_1 = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, $x_2 = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, $1 \leq 6x_1 + 7x_2 \leq 41$.

x_1	x_2	$6x_1 + 7x_2$
0	1	7
0	2	14
0	3	21
0	4	28
0	5	35
1	0	6
1	1	13
1	2	20
1	3	27
1	4	34
1	5	41
2	0	12
2	1	19
2	2	26
2	3	33
2	4	40
3	0	18
3	1	25
3	2	32
3	3	39
4	0	24
4	1	31
4	2	38
5	0	30
5	1	37
6	0	36

Для наглядности изобразим набираемые монетами суммы другой таблицей

1	2	3	4	5	~~6~~
~~7~~	8	9	10	11	~~12~~
~~13~~	~~14~~	15	16	17	~~18~~
~~19~~	~~20~~	~~21~~	22	23	~~24~~
~~25~~	~~26~~	~~27~~	~~28~~	29	~~30~~
~~31~~	~~32~~	~~33~~	~~34~~	~~35~~	~~36~~
~~37~~	~~38~~	~~39~~	~~40~~	~~41~~	~~42~~

Остается 15 цен, которых больше не должно быть: 1, 2, 3, 4, 5, 8, 9, 10, 11, 15, 16, 17, 22, 23, 29.

Задача 7011.1 (о Кате).

На электростанции залы, занимаемые турбинами, имеют вид квадратов, длина стороны каждого квадрата – целое число метров. Потолки трех залов решили отремонтировать, покрыв их специальной краской по цене 1000 рублей за 1 $м^2$ покрытия. Кассир ремонтного предприятия Катя, принимая плату, заметила, что все банкноты оказались достоинством 5000 рублей, сдача не потребовалась. Катя хорошо умеет считать и быстро поняла, что по крайней мере один из квадратных залов имеет длину стороны, кратную 5 метрам. Почему Катя сделала такой вывод? Если бы существовали банкноты по 6000 рублей и ими была собрана сумма за ремонт 2011 или 2012 квадратных залов с целыми размерами, то остался бы верен вывод Кати?

Решение.

Если n_1, n_2, n_3 - длины сторон квадратных залов, то плата за их ремонт составляет $1000(n_1^2+n_2^2+n_3^2)$ рублей. Эта сумма кратна 5000, поэтому сумма $n_1^2+n_2^2+n_3^2$ кратна 5. Катя поняла, что по крайней мере одно из натуральных чисел n_1, n_2, n_3 кратно 5. Квадрат натурального числа при делении на 5 имеет остаток 0 (число кратно 5) или 1 (число имеет остаток 1 или 4) или 4 (число имеет остаток 2 или 3) – это легко проверить. Если бы ни одно из трех чисел n_1, n_2, n_3 не делилось на 5, то сумма могла бы давать остатки только 1+1+1 или 1+1+4 или 1+4+4 или 4+4+4, то есть не могла быть кратна 5. Квадрат натурального числа при делении на 6 имеет остаток 0 или 1 или 4 или 3. Если бы было 2011 квадратных залов со сторонами то n_1, n_2, …, n_{2011}, то при $n_1=\ldots=n_{2009}=1$, $n_{2010}=2$, $n_{2011}=3$ сумма $n_1^2+\ldots+n_{2011}^2$ имела бы при делении на 6 такой же остаток, как 2009+4+3=2016, сумма таких квадратов кратна 6. Если все 2012 чисел равны 3, то сумма их квадратов кратна 6. В этих случаях вывод Кати неверен.

Задача 6011.6, 7011.6 (о корне).

Ответ. Алгоритм представлен ниже. Количество действий n-количество действий, тогда $0 \le n \le \lceil N \rceil$ (ближайшее целое сверху).

Решение.

Алгоритм вычисления $\sqrt{x}$, x-натуральное, основан на простом факте:

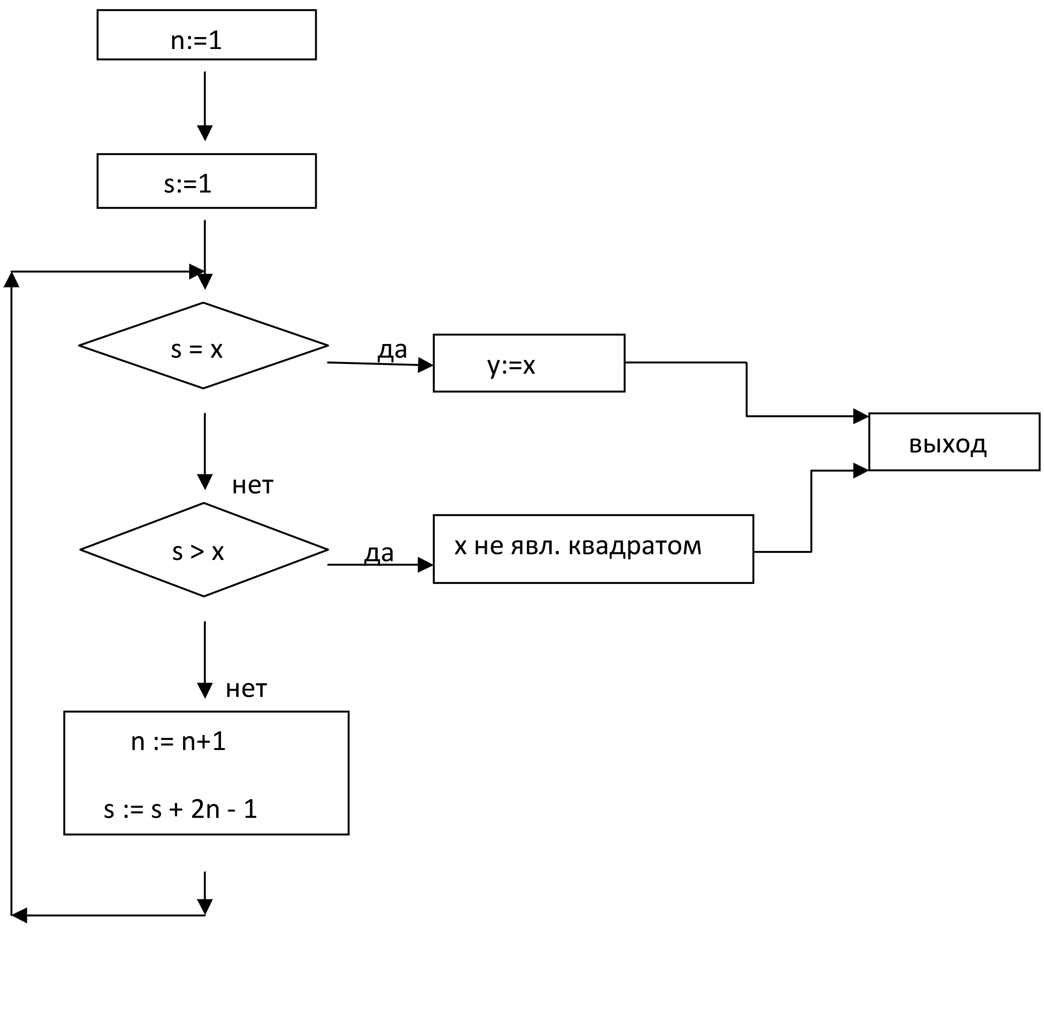
$$N = n^2 = 1+3+5+\ldots+(2n-1)$$

Представим алгоритм в виде блок-схемы.

Вход: натуральное x.

Выход: 1) $y=\sqrt{x}$, если x является квадратом или сообщение "x не является квадратом",

2) n, равное числу повторов цикла, т.е. число сложений.



Замечание. Тот же самый алгоритм можно переписать, используя только вычитания. Количество действий, очевидно, не изменится.

Задача об игре математиков

Математик А, находясь на отдыхе, предложил математику В следующую игру: «Найдите какое-либо решение квадратного уравнения с тремя неизвестными $x^2 + y^2 + z^2 = xy + xz + yz$. Если Вы этого сделать не сможете, то заплатите мне 1000 рублей. Если я, зная Ваше решение (x_1, y_1, z_1), смогу найти другое решение (x_2, y_2, z_2) такое, что $x_2 + y_2 + z_2 - (x_1 + y_1 + z_1) = \Delta > 0$, то Вы заплатите мне N рублей, где N – целая часть числа Δ. Если я этого сделать не смогу, я заплачу Вам 100M рублей, где M – целая часть числа $|x_1| + |y_1| + |z_1| + 1000$.» Математик В, подумав, отказался играть, поняв, что он всегда окажется в проигрыше.

1) Почему В сделал такой вывод?

2) Как можно изменить уравнение, чтобы оно оставалось квадратным с тремя неизвестными, но при тех же условиях игры математик В выиграл?

Решение и ответ.

Общее решение уравнения x=y=z=c, где c - любое число. В этом можно убедиться множеством способов. Для любого решения, предложенного игроком В, игрок А найдет решение, дающее ему сколь угодно большой выигрыш. Изменить уравнение можно бесконечным числом способов, например, $x^2+2y^2+3z^2=0$.

Для **задачи об «инопланетянине» ответ** таков: площадь в обоих случаях одинакова. Это устанавливается без применения формул площади треугольника, достаточно увидеть равные треугольники, парами образующие прямоугольник.